МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

СУМСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра технічного сервісу

курс лекцій з дисципліни «Теоретична механіка та механіка матеріалів і конструкцій»

У ДВОХ ЧАСТИНАХ

(Ч. 1 та Ч. 2)

для студентів ОС «Бакалавр» (Мех. 1, Мех. 1 с.т., ЗМех)

спеціальності 208 «Агроінженерія»

денної та заочної форм навчання

СУМИ 2023

УДК 001.891:656.13

Укладач: Бондарев С.Г., к.т.н., доцент, кафедри технічного сервісу.

Методичні вказівки курсу лекцій з дисципліни «Теоретична механіка та механіка матеріалів і конструкцій» у двох частинах, для студентів 1 курсу. ОС «Бакалавр» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної та заочної форм навчання. - Суми, 2023. –164 с.

В методичних вказівках представлено теоретичний матеріал, який розкриває основи теоретичної механіки у розділі статики, а також висвітлено основні питання курсу механіки матеріалів і конструкцій, зокрема деформації стрижнів, статично невизначені системи, складний опір.

При виконанні наведених в методичних вказівках завдань здобувач вищої освіти має засвоїти методологію визначення переміщення балок при згині, розраховувати статично невизначені рами за методом сил, виконувати розрахунок стрижнів на позацентровий розтяг і стиск та визначати стійкість стиснутих стрижнів.

Рецензенти: Тарельник В.Б. д.т.н., проф., завідувач кафедри “Технічний сервіс”

Зубко В.М. д.т.н., проф, декан інженерно-технологічного факультету.

Відповідальний за випуск: Бондарев С.Г., доцент кафедри “Технічний сервіс”.

Рекомендовано до друку Методичною радою інженерно-технологічного факультету СНАУ.

Протокол № 6 від " 22 " травня 2023 р.

© Сумський національний аграрний університет, 2023

© Бондарев С.Г., 2023

ПЛАН

ЧАСТИНА 1 ТЕОРЕТИЧНАМЕХАНІКА

1.1 Лекція 1. Статика твердого тіла 4
1.2 Лекція 2. Система збіжних сил. Додавання сил і умови рівноваги 12
1.3. Лекція 3 Теорія моментів і пар сил на площині і 20
1.4. Лекція 4 Плоска система довільних сил. Додавання сил і умови рівноваги. 30
1.5. Лекція 5 Рівновага системи тіл 39
1.6Лекція 6 Плоскі ферми і їх розрахунок 44
1.7.Лекція 7 Тертя ковзання та тертя кочення. 52

ЧАСТИНА 2 МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

2.1 Лекція 1. Основні поняття курсу «Механіка матеріалів і конструкцій» 66
2.2 Лекція 2. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення. Метод перерізів 74
2.3. Лекція 3 Геометричні характеристики плоских перерізів 80
2.4. Лекція 4 Геометричні характеристики плоских перерізів. 84
2.5. Лекція 5 Центральний розтяг і стиск стрижнів Ч.1 88
2.6. Лекція 6 Центральний розтяг і стиск стрижнів Ч 2 96
2.7 Лекція 7 Напружений стан в точці. 103
2.8 Лекція 8. Деформований стан у точці 108
2.9 Лекція 9. Теорії міцності 115
2.10. Лекція 10 Кручення та зсув 121
2.11. Лекція 11 Кручення. 127
2.12. Лекція 12 Плоский згин 135
2.13 Лекція 13 Чистий згин 143
2.14.Лекція 14 Поперечний згин 150
2.15 Лекція 15 . Міцність балок при згині 158

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

(Частина 1, Статика)

Лекція 1. Статика твердого тіла

План

1. Предмет статики. Основні поняття і визначення
2. Задачі статики.
3. Аксіоми статики
4. Основні типи в’язей та їх реакції
5. Класифікація систем сил

1. Предмет статики. Основні поняття і визначення.

Основні поняття теоретичної механіки, з курсу фізики.

Матеріальна точка - це тіло певної маси, розмірами та формою якого можна нехтувати в умовах даної задачі.

Система матеріальних точок (матеріальна система) - це сукупність точок, положення і рух яких взаємопов’язані і взаємообумовлені.

Абсолютно тверде тіло - це тіло, в якому відстані між двома довільними точками не змінюються з часом, простіше, це тіло, деформація якого під дією сил вважається малою і тому не враховується.

Цілком зрозуміло, що в природі та техніці не існує реальних тіл, які повністю відповідають цим поняттям. Матеріальна точка, система матеріальних точок та тверде тіло є ідеальними поняттями, розрахунковими моделями при вивченні механіки.

2. Задачі статики.

Перш, ніж вивчати перший розділ теоретичної механіки - статику, сформулюємо задачі статики:

1) визначення умов рівноваги тіл під дією різних систем сил як на площині, так і у просторі;

2) визначення методів перетворення систем сил із мстою їх спрощення і заміни найменшою кількістю силових факторів.

В основі цього розділу механіки покладені аксіоми статики, які нижче будуть розглянуті. А зараз розглянемо ще деякі основні поняття статики та визначення.

Сила — це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, величину та напрямок взаємодії.

З цього класичного визначення сили випливає, що вона є величиною векторною, а тому має три визначальних параметри: величина сили (або модуль), напрямок дії та точка прикладення.

На розрахунково-силових схемах силу зображують у вигляді вектора довільної довжини (крім випадків графічної статики, коли силу креслять у масштабі). Покажемо, наприклад, (рис. 1.1) довільну силу P , яка зображена у вигляді вектора *AB,* прикладена у точці *A* і діє вздовж лінії *МИ.*

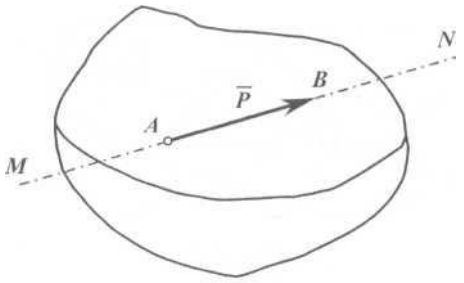


Рис. 1.1.

У Міжнародній системі одиниць (СІ) одиницею вимірювання сили є 1 один ньютон -[1Н] або один кілоньютон [1 *кН].* 1 [кН] = 1000 [Н]. У $_{ч}$ технічній системі (МКГСС) одиницею вимірювання сили є один кілограм сили - [кГ], або *[кгс], у* системі (СГС) - одна дина [дін].

На тіло можуть одночасно діяти декілька сил, утворюючи систему.

Система сил - це сукупність декількох сил, які діють на тіло або на матеріальну систему одночасно.

Еквівалентні системи сил - це такі системи сил, які на одне і теж тіло діють однаково. Система сил може бути, в деяких випадках, еквівалентна нулю.

Рівнодійна сила системи сил - це така сила, дія якої еквівалентна дії заданої системи сил.

Зрівноважу вальна сила - це сила, яка за величиною дорівнює рівно- дійній

силі, розташована з нею на одній прямій, але протилежна за напрямом.

3. Аксіоми статики

В основу статики покладені аксіоми, тобто положення, які приймаються без доведення, тому що вони підтверджені багатовіковою практикою.

Аксіома 1. Абсолютно тверде тіло під дією двох сил тільки тоді буде перебувати в рівновазі, коли їх вектори дорівнюють за модулем, протилежні за напрямком і лінії їх дії співпадають.

На рис. 1.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил P_1 і P_2, які мають однакові модулі $|P_1| = |P_2|$, розташовані на одній прямій MN і мають протилежні напрямки. Точки прикладення сил можуть співпадати. Таким чином, $P_1 = -P_2$-

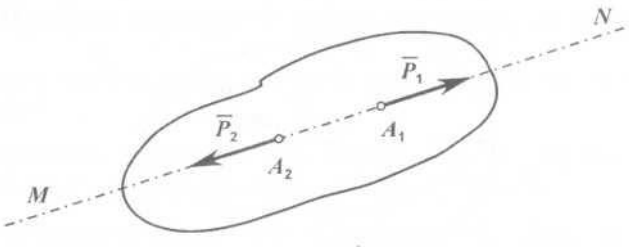


Рис. 1.2

Аксіома 2. Стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил. Наприклад, система зрівноважених сил (P_1 P_2) показана на рис. 1.2. Ця аксіома носить назву аксіоми виключення сил.

Наслідок із перших двох аксіом. Точку прикладення сили можна пересувати в межах даного тіла вздовж лінії дії сили (сила є ковзним вектором).

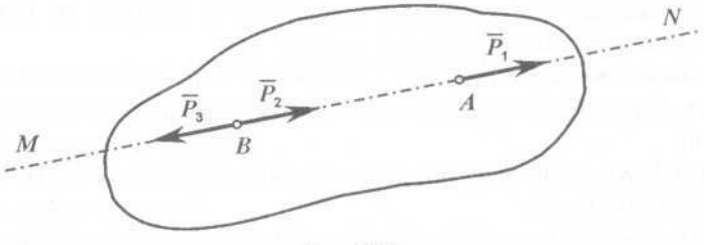


Рис. 1.3.

Припустимо, що на тіло (рис. 1.3) діє вектор сили P_1, який прикладений в точці А і має лінію дії MN. Прикладемо в довільній точці В на лінії дії *MN* дві сили P_2 і P_3, такі, що $P_2 = P_1$, а $P_3 = -P_1$. Згідно першої аксіоми ці сили зрівноважені, а згідно другої аксіоми їх можна приєднати, не змінюючи

кінематичного стану тіла.

Але цю систему трьох сил можна розглядати по іншому: як силу P_2, яка дорівнює силі P_1 і перенесена з точки А в точку В, і зрівноважену систему двох сил (P_1 і P_3), яку можна відкинути.

Аксіома 3. Рівнодійна двох непаралельних сил, які прикладені до тіла в одній точці, зображується діагоналлю паралелограма, який побудований на цих силах, як на сторонах, і прикладена в точці їх перетину. Ця аксіома носить назву закону паралелограма сил.

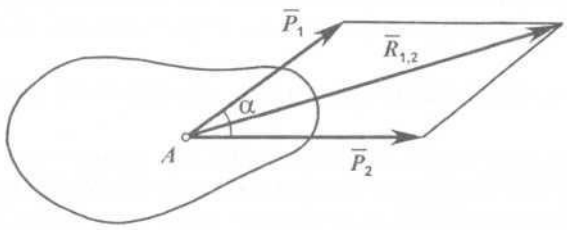


Рис. 1.4.

Припустимо, що до тіла (рис. 1.4) в точці А прикладені дві сили P_1 та P2, які розташовані під кутом а. Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку А діагональ, яка і буде рівнодійною $R_{1,2}$ цих сил.

Таким чином, III аксіома статики дає можливість геометрично додати дві сили, що прикладені в одній точці:

$$\overline{R}_{1,2} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2.$$

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто модуль рівнодійної, дорівнює:

$$R_{1,2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha}.$$

Пропонується самостійно визначити рівнодійну, якщо сили прикладені в одній точці і розташовані під прямим кутом, а також коли вони співпадають за напрямком або спрямовані у протилежні сторони.

Аксіома 4. Два взаємодіючих тіла діють одне на одного з рівними за модулем, але протилежними за напрямком силами. Ця аксіома носить на¬зву закону дії та протидії.

Слід зауважити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, тому що вони

прикладені до різних тіл.

Аксіома 5. Якщо деформоване (нетверде) тіло перебуває у стані рівноваги під дією системи сил, то цей стан не зміниться, якщо тіло затвердіє. Ця аксіома має назву принципу затвердіння.

4. Основні типи в’язей та їх реакції

У теоретичній механіці тверді тіла і матеріальні системи поділяються на вільні та невільні.

Тіло вважається вільним, якщо воно має можливість рухатись у просторі в будь-якому напрямку (або, якщо на рух системи не накладені обмеження).

Тіло, рух якого у просторі чимось обмежується, вважається невільним.

Тіла, або перешкоди, які обмежують рух даного тіла, називаються в’язями. Якщо тіло невільне, то вважають, що на нього накладені в’язі.

Механічна дія в’язі на дане тіло має назву сили реакції в’язі (в подальшому “реакція”).

У статиці розглядаються найпростіші в’язі у формі різних твердих та гнучких тіл.

Розглянемо основні типи в’язей як розрахункові моделі. Кожна з цих в’язей має свою назву, графічне зображення і свої реакції.

1. Ідеально гладенька поверхня або опора (рис. 1.5, а). Реакція цієї в’язі R спрямована перпендикулярно до поверхні або розташована вздовж нормалі. Гладенька площина накладає одну в’язь - вона унеможливлює рух по нормалі до поверхні, тому буде одна реакція, яка напрямлена проти напрямку втраченого переміщення за рахунок накладення в’язі.

Якщо поверхня є сферичною (рис. 1.5, б), то реакція R_A проходить крізь центри сфер О і О] по нормалі п (перпендикулярно до дотичної г).

2. Точкова опора (рис. 1.5, в). Якщо гладенька площина вироджується у лінію або точку, то реакції в’язей R_A і $R_в$ будуть спрямовані по перпендикулярам до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в даній точці.

3. Шарнірно-нерухома опора або нерухомий шарнір (підшипник) (рис. 1.5, г). Реакція шарнірно-нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і

заздалегідь невідома за напрямком. Невідомий вектор реакції розкладається на дві складових вздовж осей координат і R_y. З другого боку, ця опора накладає дві в'язі - неможливість вертикального і горизонтального переміщень, тому і потребує дві відповідні складові реакцій у площині, яка перпендикулярна до осі шарніра.

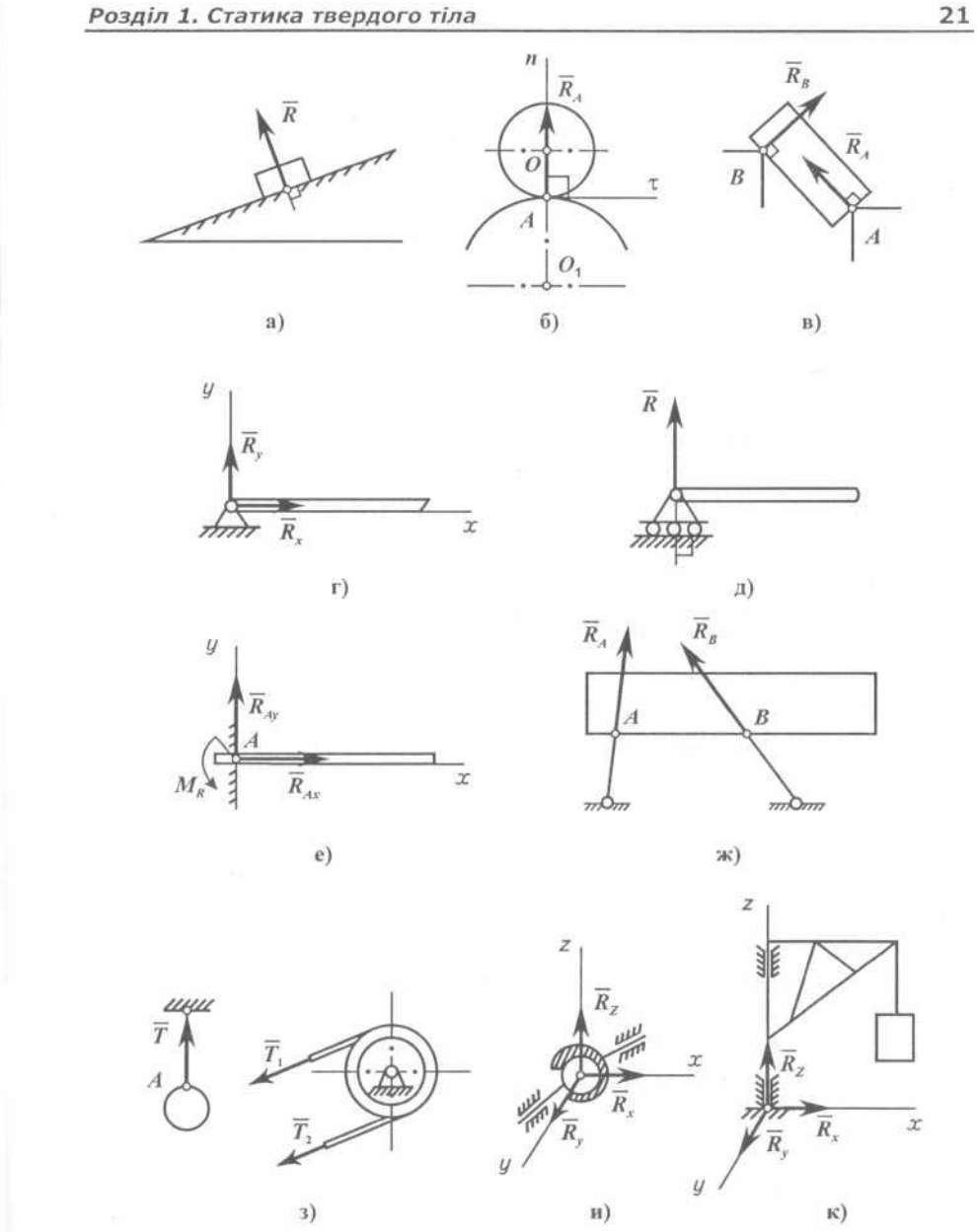


Рис. 1.5.

4. Шарнірно-рухома опора або коток (рис. 1.5, д). Реакція цієї в'язі А спрямована перпендикулярно до площини, по якій рухається коток.

5. Жорстке закріплення (рис. 1.5, є). Реакція цієї в'язі повинна бути представлена двома складовими у вигляді сил R_{Ax}, і R_{Ay} та реактивного моменту M_R. Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: неможливість

вертикального і горизонтального лінійних переміщень та повороту у площині.

6. Ідеальний стрижень, тобто однорідний невагомий тонкий стрижень, на кінцях якого встановлені циліндричні шарніри і який працює тільки на розтяг або на стиск (рис. 1.5, ж). Реакція цієї в'язі R спрямована вздовж осі стрижня і прикладена у центрі шарніра.

7. Гнучка нитка або в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами, тобто невагомими, нерозтяжними нитками: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 1.5, з). Реакція цієї в'язі T напрямлена вздовж нитки і прикладена у точці закріплення A. У пасовій передачі натяги в її гілках T_1 і T_2 також вважаються реакціями гнучких в'язей.

8. Сферичний шарнір або його окремий випадок - підп'ятник (рис. 1.5, к, и). Реакція цієї в'язі повинна бути зображеною трьома складовими напрямлених вздовж осей просторової декартової системи координат x, y, z початком у центрі сферичного шарніра, або підп'ятника.

У зв'язку з введенням поняття в'язей вводиться VI та VII аксіоми статики, які носять назви аксіоми про звільнення від в'язей та аксіоми про накладання нових в'язей.

Аксіома 6. Рівновага невільного матеріального тіла не порушиться, якщо відкинути в'язі, що накладені на нього, а замість них прикласти сили, які дорівнюють їх реакціям. м

Аксіома 7. Рівновага невільного матеріального тіла не порушиться, якщо на нього накласти нові в'язі.

5. Класифікація систем сил

По характеру розташування всі системи сил можна поділити на плоскі і просторові системи. Крім того, кожна з цих систем може бути поділена на систему збіжних сил, систему паралельних сил і систему довільних сил.

Зробимо такі визначення:

- система збіжних сил характеризується тим, що напрямки векторів усіх сил перетинаються в одній точці;
- у системі паралельних сил вектори сил паралельні;

- у системі довільних сил вектори розташовані як завгодно на площині або у просторі.

Таким чином, можна констатувати, що маємо шість різних систем сил, під дією яких тіло може перебувати у стані рівноваги або рухатись за певним законом.

Питання для самоконтролю

1. Що вивчає теоретична механіка? Що таке механічний рух?
2. Що вивчає статика? Задачі статики.
3. У чому полягає суть понять матеріальна точка та абсолютно тверде тіло?
4. Що таке сила? Назвіть три параметри, що характеризують силу?
5. Що таке система сил?
6. Яка сила є рівнодійною системи сил?
7. Як формулюються аксіоми статики?
8. В якому випадку матеріальне тіло буде вільним?
9. Що таке в’язь і що таке реакція в’язі?
10. Які основні типи в’язей зустрічаються при розв’язуванні задач статики і які напрями мають їх реакції?

Лекція 2. Система збіжних сил. Додавання сил і умови рівноваги

План

1. Плоска система збіжних сил.
2. Визначення рівнодійної системи збіжних сил. Геометричний спосіб додавання сил.
3. Умова рівноваги плоскої системи збіжних сил у геометричній формі.
4. Теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил.
5. Проекція сили на вісь та на площину
6. Визначення сили за її проекціями.
7. Теорема про проекції рівнодійної сили на вісь
8. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил.
9. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил в аналітичній формі

1. Плоска система збіжних сил

Якщо всі сили, що прикладені до тіла, розташовані в одній площині та лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву плоскої системи збіжних сил.

Покажемо на рис. 1.6 довільне тіло, до якого прикладена плоска системи збіжних сил $P_X, P_2, P_3, \ldots, P_n$, При цьому лінії дії всіх сил перетинаються в точці A.

2. Визначення рівнодійної системи збіжних сил. Геометричний спосіб додавання сил

Додати систему сил означає визначити їх рівнодійну. Спробуємо знайти рівнодійну для плоскої системи збіжних сил, яка зображена нарис. 1.6. Візьмемо (умовно) дві перші сили і P_2 і на підставі 3 аксіоми статики знайдемо їх рівнодійну $_2$, для чого на силах P_1 і P_2, як на сторонах, побудуємо паралелограм, діагональ якого прикладена у точці A, і є їх рівнодійною $R_{1,2}$. Далі геометрично додамо дві наступні сили P_1 і P_2, і вже на цих силах як на сторонах побудуємо свій паралелограм, діагональ якого буде другою рівнодійною $R_{1,3}$. Продовжуємо далі до останньої сили P_n. Якщо побудовано останній паралелограм і проведена

остання діагональ, то вона і буде рівнодійною R системи збіжних сил, яка показана на рис. 1.6.

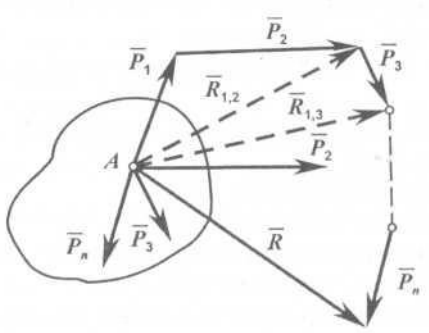


Рис. 1.6

Якщо уважно придивитися до геометричної побудови паралелограмів, то можна побачити, що до кінця вектора сили P_1 було приєднано вектор сили P_2 (тобто в кінець вектора P_1 перенесено паралельно вектор P_2 і так далі до останньої сили P_n.

Таким чином, геометричний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови

$$\overline{R}_{1,n} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots + \overline{P}_n.$$

силового многокутника. Він будується шляхом паралельного перенесення векторів сил у масштабі, коли початок наступної сили співпадає з кінцем попередньої сили. Тоді вектор рівнодійної з'єднує початок першої сили з кінцем останньої сили. Це можна записати так:

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до многокутника, але конфігурація силового многокутника буде іншою.

3. Умова рівноваги плоскої системи збіжних сил у геометричній формі

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила, то про рівновагу цього тіла мови не може бути. Таким чином, якщо розглядати плоску систему збіжних сил, яка зведена до рівнодійної, то тіло не може бути у рівновазі.

Для рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна всіх сил дорівнювала нулю.

Рівнодійна такої системи сил буде дорівнювати нулю, якщо силовий многокутник буде замкненим, тобто коли початок вектора першої сили буде співпадати з кінцем вектора останньої сили.

4. Теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил

Якщо тіло під дією системи трьох непаралельних сил, що розміщені в одній площині, перебуває в рівновазі, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Уявимо тіло (рис. 1.7), до якого в точках *A, B, C* прикладені сили P_1, P_2, P_3, вектори яких розташовані в одній площині. Розглянемо спочатку дві сили P_1 та P_2. На підставі наслідку з I і II аксіом статики вказані сили завжди можна перенести по лінії їх дії в одну точку, наприклад, у точку *O.* Далі, якщо маємо в точці *O* дві прикладені сили, то на підставі III аксіоми статики їх можна замінити однією силою, тобто рівнодійною $B_{1\,2}$. Побудуємо на рис. 1.7 на вказаних векторах сил P_1 та P_2 паралелограм і покажемо рівнодійну $R_{1\,2}$. Тепер тіло перебуває під дією тільки двох сил P_3 та $R_{1,2}$ і воно буде в рівновазі лише тоді, коли вектори цих сил розташовані на одній прямій, тобто на прямій *CO.* Звідси і вектор сили P_3 перетинає точку *O.* Теорема доведена.

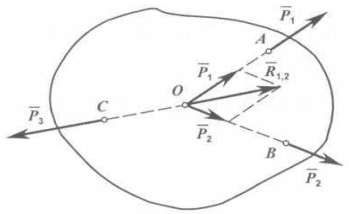


Рис. 1.7.

5. Проекція сили на вісь та на площину

Уявимо силу *P,* вектор якої довільно розташований у площині креслення (рис. 1.8). Виберемо у цій площині вісь, наприклад, вісь *x.* Необхідно спроектувати вказану силу *P* на дану вісь *x.*

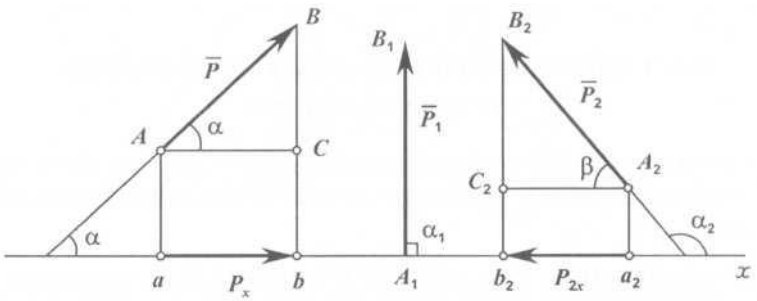


Рис. 1.8.

Позначимо спочатку кінці вектора сили *P* літерами *A* і *B* і опустимо з них на вісь *x* перпендикуляри. Точки перетину перпендикулярів із віссю *x* (позначимо їх

$$P_x = P \cdot \cos\alpha.$$

відповідними малими буквами *a* і *b)* утворили на осі *x* напрямлений відрізок, який і буде проекцією сили *P* на вісь *x.* За величиною цей відрізок дорівнює добутку модуля сили *P* на косинус кута, під яким вектор сили перетинає вісь:

За знаком проекція сили на вісь буде тоді додатна, коли кут *a* (кут перетину напрямку вектора сили або лінії дії сили з віссю) є гострим. Цілком зрозуміло, якщо цей кут дорівнює 90°, то проекція сили P_1 на вісь *x* дорівнюватиме нулю. Якщо кут *a* буде тупий, то проекція сили P_2 на вісь *x* буде мати від'ємний знак. Значення проекції в даному випадку буде:

Але практично зручніше використовувати не тупий кут a_2, а гострий кут */3*

$$P_{2x} = -P_2 \cdot \cos\beta.$$

між вектором сили P_2 і напрямком осі *x.* Знак проекції легко визначається зі схеми:

Таким чином, проекція сили на вісь - це напрямлений відрізок на осі, утворений між перпендикулярами, які опущені з кінців вектора сили на вісь, і який за величиною дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом вектора сили та віссю.

Спроектуємо тепер вектор сили на площину і осі координат.

Візьмемо силу *P,* вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.9). Виберемо у просторі прямокутну декартову систему координат *Oxyt.,* початок

$$P_{xy} = P\cos\alpha,$$

відліку якої (точку О) суміщений з точкою прикладення вектора сили *P*. Спроектуємо вектор сили *P* на площину *xOy.* Опустимо з точки *A* (кінець вектора сили) на вказану площину перпендикуляр, який перетинає її в точці *a*. На площині *xOy* утворено вектор *Oa,* який і є проекцією P_{xy} сили на площину. За модулем ця проекція дорівнює: $P_{2x} = P_2 \cdot \cos\alpha_2.$

де *a* - кут між вектором сили *P* та площиною *xOy.*

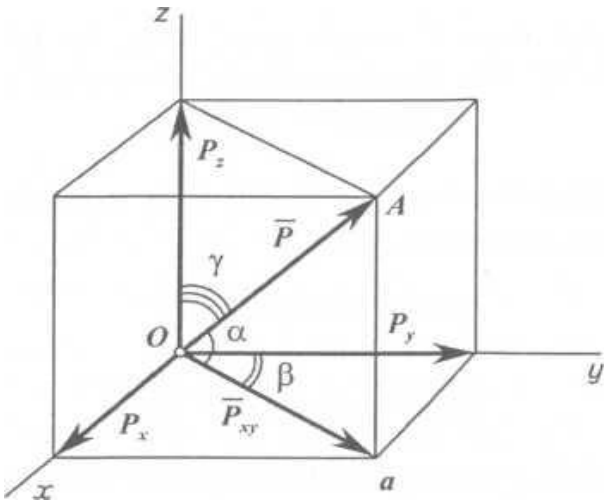


Рис. 1.9.

Слід зауважити, що проекція вектора сили на площину є вектором, тому що площина не має базисних векторів, ортів.

Якщо в площині *xOy* відомий кут р, то є можливість спроектувати силу *P* на осі *x* та *y,* опускаючи з точки *a* на осі перпендикуляри і за відомим вже правилом отримати проекції вектора А на вказані осі:

У даному випадку крізь вісь г та вектор сили Р можна провести площину, тому є можливість спроектувати силу на цю вісь за відомим правилом. Ця

$$P_z = P \cdot \cos\gamma,$$

де γ – кут між вектором сили $\overline{P}$ та віссю z.

$$P_y = P_{xy} \cdot \cos\beta = P \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta. \qquad (1.7)$$

проекція буде дорівнювати:

6. Визначення сили за її проекціями

Припустимо, що маємо в площині рисунка прямокутну декартову систему координат *Oxy,* задані дві проекції сили: P_x та P_y (рис. 1.10). Треба за даними проекціями обчислити модуль вектора самої сили *P,* а також його напрямок.

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}\,.$$

На заданих проекціях, як на сторонах, будуємо прямокутник, діагональ якого, що проходить крізь точку перетину проекцій, і є шуканим вектором сили *P*. Модуль сили *P* можна визначити з наступного виразу:

Кути між вектором сили *P* та осями *x* та *y* можна визначити за допомогою напрямних КОСИНУСІВ:

$$\cos\alpha = \cos\,(x,\hat{\overline{P}}) = \frac{P_x}{P},$$

Знаючи напрямні косинуси, є можливість знайти величини відповідних кутів за допомогою функцій арккосинуса.

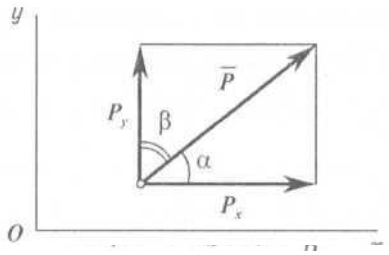


Рис. 1.10.

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}\,.$$

Напрямок вектора цієї сили також визначається через напрямні косинуси його кутів із відповідними осями координат x, y і z:

Аналогічно для просторової системи сил (рис. 1.9) можна побудувати на проекціях сил, як на сторонах, паралелепіпед, а модуль сили *P* визначити так:

$$\cos\,(x,\hat{\overline{P}}) = \frac{P_x}{P},$$

$$\cos\,(y,\hat{\overline{P}}) = \frac{P_y}{P},$$

$$\cos\,(z,\hat{\overline{P}}) = \frac{P_z}{P}.$$

Через функції арккосинусів визначають величини відповідних кутів.

7. Теорема про проекцію рівнодійної сили на вісь

Проекція вектора рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів складових сил на ту ж саму вісь.

Доведення. Маємо систему сил P_x, P_2, P_3, P_4, яка зведена до рівнодійної *Я* за допомогою силового многокутника (рис. 1.11). Введемо на площині

прямокутну декартову систему координат *Oxy* і спроектуємо на вісь *x* всі сили. Для цього позначимо кінці векторів всіх сил літерами: *A, B, C, D, K,* і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь *x.* Точки перетину перпендикулярів із віссю,

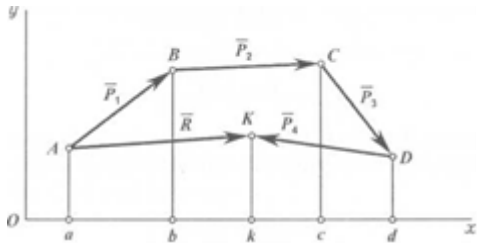


Рис1,11

які позначені відповідними малими літерами: a, b, c, d, k, утворили на осі x напрямлені відрізки, які і є проекціями всіх сил на цю вісь. Кожна проекція дорівнює відповідно:

$$|ab| = P_{1x};\ |bc| = P_{2x};\ |cd| = P_{.3x}\ |-dk| = P_{4x}. \qquad (1.12)$$

Алгебраїчно додамо всі проекції і підрахуємо, чому ця сума дорівнюватиме:

$$ab + bc + cd - dk = ak\ .$$

Але відрізок *ak* і є проекцією рівнодійної сили *B* на вісь *x.* Поширюючи цю суму

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}\ .$$

на *n* сил, можна записати:

Теорема доведена.

8. Аналітичний спосіб додавання системи збіжних сил

На підставі теореми про проекцію рівнодійної сили на вісь, маємо:

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \ldots + P_{nx} = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}.$$

Аналогічно проекція рівнодійної сили на вісь *y* дорівнює:

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \ldots + P_{ny} = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}.$$

Модуль рівнодійної визначається:

Кути між вектором рівнодійної R та осями координат *x* та *y* визначимо через функції напрямних косинусів кутів між відповідною віссю та рівнодійною:

$$\cos(\hat{y},\overline{R}) = \frac{R_y}{R}.$$
$$\cos(x,\overline{R}) = \frac{R_x}{R},$$

Знаючи величини напрямних косинусів, через R функції арккосинусів є можливість знайти величини відповідних кутів.

9. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил в аналітичній формі

Плоску систему збіжних сил можна замінити однією силою, яка носить назву рівнодійної.

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна дорівнювала нулю. А якщо рівнодійна дорівнює нулю, то і її проекції на осі x і y теж повинні дорівнювати нулю. Оскільки проекції рівнодійної дорівнюють алгебраїчним сумам проекцій складових сил, то, остаточно, матимемо умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил:

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією плоскої системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі координат дорівнювали нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0,$$

На підставі умов рівноваги (1.18) складаються рівняння рівноваги в проекціях на відповідні осі корди

Питання для самоконтролю

1. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
2. Для чого і яким чином будується силовий многокутник?
3. Як сформулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній формі?
4. Як сформулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил?
5. Як визначаються проекції сили на вісь і площину?
6. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
7. Як визначити силу за її проекціями?

8. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
9. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
10. Які умови і які рівняння рівноваги системи збіжних сил?

Лекція 3. Теорія моментів і пар сил на площині

План

1. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил
2. Момент сили відносно центра (точки). Алгебраїчна величина моменту
3. Пара сил. Момент пари сил

1. Система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил

Якщо лінії дії системи сил паралельні, то такі сили носять назву “системи паралельних сил”.

Розглянемо питання про додавання сил, лінії дії яких паралельні. При цьому тут можуть бути два випадки: коли паралельні сили мають однаковий напрямок та коли паралельні сили напрямлені протилежно.

1. Розглянемо випадок, якщо дві паралельні сили мають однаковий напрямок. Маємо тіло, до якого прикладені дві паралельні сили: P_x - у точці А і P_2 - у точці В (рис. 1.12). Напрямок сил P_x і P_2 однаковий. Додати сили - це означає визначити їх рівнодійну.

Спочатку з’єднаємо точки А і В прямою. Далі прикладемо в точках А і В зрівноважену систему сил P_3 і P_4. Причому $P_3 = - P_4$. Вектори сил P_3 і P_4 розміщені на прямій АВ. Друга аксіома статики дозволяє це зробити. Внаслідок цього в точках А і В отримані по дві сили (в точці А - $P_}$ і P_3, а в точці В - P_2 і P_4), які можна додати (за правилом паралелограма) і в кожній точці отримати рівнодійні сили: $К_{хз}$ і $А_{24}$.

Перенесемо точки прикладення рівнодійних R_{13} $R_{2,4}$ вздовж ліній їх дії в точку перетину Р. Далі розкладемо кожну рівнодійну на складові: R_{13} розкладається на P_x і P_3, а $R_{2\ 4}$ - на P_2 і P_4. За вже відомою другою аксіомою статики прикладені в точці Р сили P_3 і P_4 є зрівноваженою системою сил, яку можна відкинути. Залишаються прикладені в точці Р дві сили P_x і P_2, напрямок

яких співпадає. Додамо їх і отримаємо рівнодійну R, модуль якої дорівнює арифметичній сумі сил:

$$R = P_1 + P_2. \tag{1.19}$$

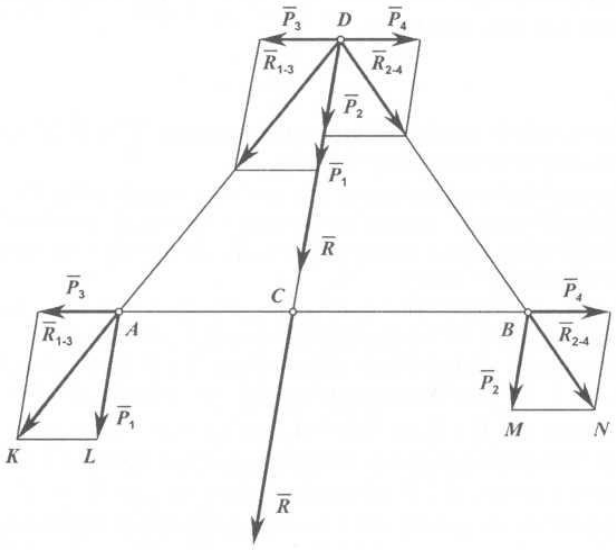


Рис. 1.12.

Перенесемо вектор рівнодійної сили R з точки Р в точку С, яка розташована на прямій АВ. Розглянемо трикутники, які є на рис. 1.12. Позначимо літерами кінці векторів сил P_1 — L, P_2 — M, $R_{1,3}$- К, $R_{2,4}$ - N. Як можна побачити з рисунка 1.12, ДЛРС є подібним ΔAKL і ΔBCD - подібний ΔBMN. Для подібних трикутників можемо скласти такі дві пропорції

$\frac{AC}{KL} = \frac{DC}{AL}$ і $\frac{BC}{MN} = \frac{DC}{BM}$. Прирівнявши їх, оскільки в них є спільний член DC, отримаємо

$$DC = \frac{AC \cdot AL}{KL} = \frac{BC \cdot BM}{MN}.$$

Покажемо позначені літерами (AL, BM, KL, MN) у цьому виразі сили (P_1, P_2, P_3, P_4). Будемо мати:

$$\frac{AC \cdot P_1}{P_3} = \frac{BC \cdot P_2}{P_4}.$$

Якщо скоротити множники P_3 і P_4 ($P_3 = P_4$) і перегрупувати, то отримаємо таке співвідношення;

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Таким чином, на підставі отриманих виразів (1.19) і (1.20), остаточно можна сформулювати наступну теорему.

Рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в один бік, є сумою цих сил, паралельна цим силам і спрямована в той же бік, точка її прикладення ділить внутрішнім чином відрізок, що з'єднує сили, на частини, які обернено пропорційні силам.

2. Далі розглянемо випадок, якщо є дві паралельні сили, але напрямок їх протилежний. Як в цьому разі визначити їх рівнодійну?

Уявимо, що до довільного тіла в точках А і В прикладені дві паралельні сили P_x і P_2, які мають протилежний напрямок (рис. 1.13). Вважаємо, що модулі сил P_x і P_2 не однакові. Далі буде зрозуміло, чому так приймається. Як і в попередньому випадку, з'єднаємо точки А і В прямою, приєднаємо в точках А і В зрівноважену систему сил $P_3 = - P_4$, вектори якої розташовані на прямій АВ і мають протилежний напрямок. Додамо сили, які прикладені в точках А і В, і отримаємо дві рівнодійні R_{13} і B_{24}. Як бачимо, ці рівнодійні мають напрямок різний, але вони не паралельні і лінії їх дії перетинаються, у даному випадку за межами тіла в точці В. Як і в попередньому випадку, перенесемо рівнодійні $B_{x\,3}$ і $K_{2\,4}$ по лініях їх дії в точку Р і розкладемо кожну на складові. Зрівноважену систему сил P_3 і P_4 відкидаємо і остаточно маємо в точці Р дві сили P_x і P_2, які лежать на одній прямій і мають протилежний напрямок. Ці сили можна алгебраїчно додати, отримавши їх рівнодійну. У даному випадку це буде різниця сил, модуль якої дорівнює;

$$R=P_1 - P_2$$

Напрямок цієї рівнодійної - у бік більшої сили, тобто, у бік сили P_1.

Перенесемо рівнодійну Я з точки Р вздовж лінії її дії в точку С, яка розташована на прямій АВ. У даному випадку точка С розміщена за межами відрізку АВ, тобто за точкою А, де була прикладена більша сила P_x.

Знайдемо місце розташування точки С. Як і в попередньому випадку, розглянемо трикутники. Позначимо літерами кінці векторів сил: P_1-*L*, P_2-*M*, $R_{1,3}$-*K*, R_{14}-*N*. Як можна побачити з рис. 1.13, Δ*BCD* є подібним Δ*DMN*, а Δ*ACD* - подібний ΔDLK Для подібних трикутників складемо такі дві пропорції:

$$\frac{BC}{MN}=\frac{CD}{DM},$$

$$\frac{AC}{KL}=\frac{CD}{DL}.$$

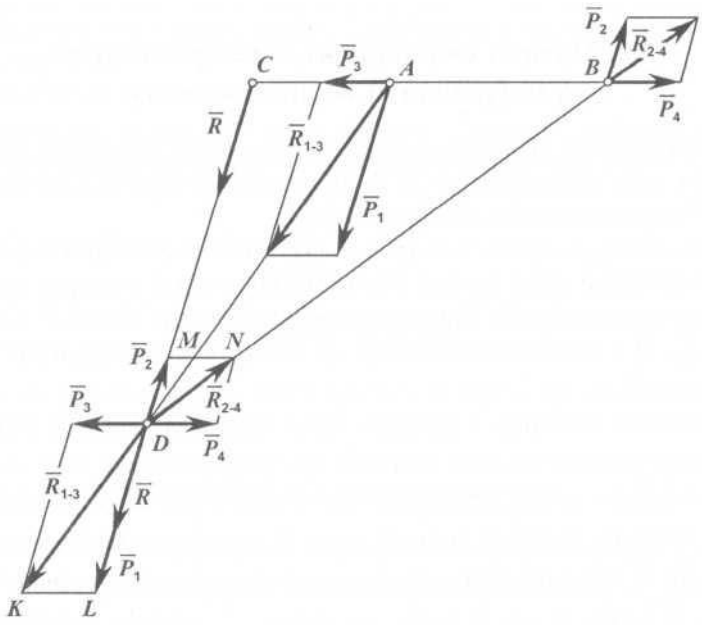


Рис. 1.13.

Оскільки кожна пропорція містить множник CP, то прирівняємо

їх, $$CD=\frac{DM\cdot BC}{MN}=\frac{DL\cdot AC}{KL}.$$

Покажемо, як і в попередньому випадку, сили, які у цьому виразі позначені літерами.

Матимемо $$\frac{P_2\cdot BC}{P_4}=\frac{P_1\cdot AC}{P_3}.$$

Скоротивши пропорцію ($P_3 = P_4$), отримаємо таке співвідношення:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{BC}{AC}.$$ (1.22)

Таким чином, на підставі отриманих виразів (1.21) і (1.22), остаточно можна сформулювати правило.

Рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані у протилежні сторони, дорівнює різниці цих сил і напрямлена в бік більшої сили, точка прикладення рівнодійної сили ділить зовнішнім чином відстань між точками прикладення заданих сил на відрізки, які обернено пропорційні величинам цих сил.

2. Момент сили відносно центра (точки). Алгебраїчна величина моменту

Сила може не тільки переміщувати тіло, але і повертати. Обертальний ефект сили характеризується її моментом відносно центра (точки), а також і відносно осі (останній буде далі).

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.14), яке може повертатися навколо точки О (точніше навколо осі, яка перпендикулярна площині рисунка і проходить через точку О). Прикладемо в інших точках тіла А, В, С вектори сил P_x, P_2, P_3 і визначимо спочатку, чи зможуть вони повертати тіло навколо точки О .

Як можна побачити з рисунка, сила $P_}$, яка прикладена у точці А, може повернути тіло навколо точки О проти ходу стрілки годинника. Сила P_2 - за ходом стрілки годинника. Проте сила P_3 не може повертати тіло навколо точки О, оскільки лінія дії сили P_3 перетинає дану точку. Таким чином сили Д і P_2 створюють обертальний ефект (момент) відносно точки О, а сила P_3 - ні.

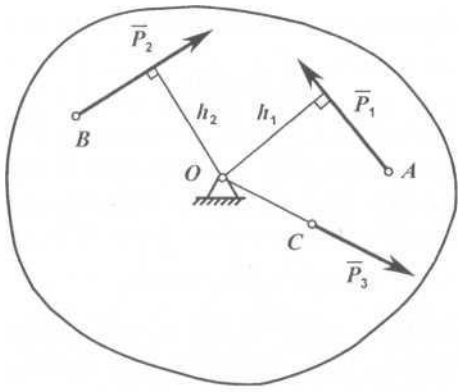


Рис. 1.14.

Алгебраїчним моментом сили відносно центра (точки) називається взятий з відповідним знаком добуток сили на плече. Плече сили відносно центра — це найкоротша відстань (перпендикуляр) між даним центром і лінією дії сили.

Момент вважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно даної точки проти годинникової стрілки і від’ємним - за годинниковою стрілкою.

Момент сили Р відносно точки О позначається $m_o(P)$.

Покажемо на рис. 1.14 плечі сил, які створюють моменти відносно точки О, і визначимо алгебраїчні величини моментів цих сил:

$$m_o(\overline{P}_1) = P_1 \cdot h_1,$$

$$m_o(\overline{P}_2) = -P_2 \cdot h_2,$$

$$m_o(\overline{P}_3) = P_3 \cdot 0 = 0.$$

Таким чином, момент сили характеризується трьома параметрами: модулем, площиною дії і напрямом повороту.

2. Момент сили відносно центра як вектор

Розглянемо силу Р, вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.15). Визначимо момент сили Р відносно довільної точки О, для чого поставимо з точки О до вектора сили Р перпендикуляр, це буде плече И. Тоді алгебраїчна величина моменту сили Р відносно точки О дорівнює:

$$m_o(P) = Ph.$$

Позначимо літерами А і В кінці вектора сили Р і з'єднаємо їх з точкою О. Основою трикутника АОВ є вектор сили Р, а вершина розміщена в точці О. Плече к є висотою трикутника АОВ. Тоді момент сили Р відносно точки О є подвійною площею трикутника А ОВ, тобто;

$$m_o(\overline{P}) = 2S\Delta AOB.$$

Далі проведемо через точку О просторову декартову систему координат Охуг з ортами і,), к . Вважаємо, що відстань О А є радіусом- вектором г точки А прикладення вектора сили Р.

Оскільки момент сили Р відносно точки О, як визначено, є подвійною площею трикутника, то побудуємо паралелограм ОАВО. Фактично вектор сили Р ми перенесли паралельно самому собі у точку О. Тепер можна побачити, що*в точці О прикладені два вектори г і Р, на яких і побудовано паралелограм. А це, як відомо, є векторний добуток двох векторів r x Р. Таким чином, момент сили відносно точки $m_0(P)$ є підсумковим вектором добутку двох векторів r і Р, тобто $m_o(\overline{P}) = \overline{r} \times \overline{P}.$

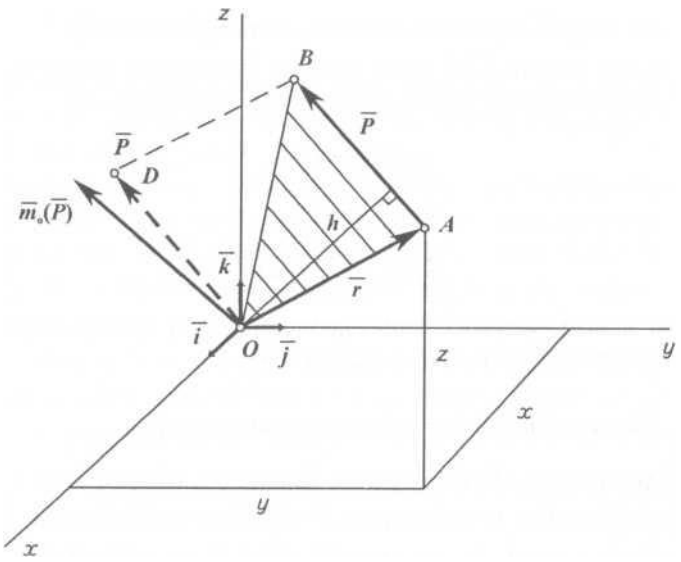


Рис. 1.15.

Остаточно сформулюємо визначення.

Момент сили відносно центра О, як підсумковий вектор добутку r x P, проходить крізь точку О, перпендикулярно площині трикутника ОАВ, і спрямований у той бік, з якого можна бачити поворот тіла під дією сили Р відносно точки О проти годинникової стрілки. За модулем він дорівнює подвійній площі трикутника, який утворюють кінці вектора сили Р і точка О.

Таким чином, момент сили відносно точки як вектор повністю, за всіма параметрами, визначає обертальний ефект сили, яка прикладена до тіла: лінія його дії визначає площину дії моменту, його напрямок визначає напрямок повороту проти годинникової стрілки, а довжина у певному масштабі визначає модуль моменту.

Визначимо аналітично значення моменту сили відносно точки.

У прийнятій системі координат вектори z і Р можна виразити через відповідні проекції на осі координат:

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},$$

$$\overline{P} = P_x\overline{i} + P_y\overline{j} + P_z\overline{k},$$

де x, y, z - проекції радіуса-вектора r на осі координат; P_x, P_y, P_z - проекції вектора сили Р на відповідні осі; i, j, k- відповідні орти осей координат.

Оскільки

$$m_o(P) = \overline{r} \times \overline{P},$$

то, як відомо з векторної алгебри, векторний добуток можна записати у вигляді визначника третього порядку через проекції векторів на осі координат:

$$m_o(P)=\bar{r}\times\bar{P}=\begin{vmatrix}\bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k}\\ x, & y, & z\\ P_x, & P_y, & P_z\end{vmatrix}.$$

Розкривши даний визначник за елементами першого рядка, отримаємо:

$$\bar{m}_o(\bar{P})=\left(yP_z-zP_y\right)\bar{i}+\left(zP_x+xP_z\right)\bar{j}+\left(xP_y-yP_x\right)\bar{k}.$$

Коефіцієнти при одиничних векторах у виразі (1.31) є проекціями моменту сили відносно точки, як вектора, на осі координат x, y, z.

$$\left.\begin{aligned}\left[m_o(\bar{P})\right]_x&=yP_z-zP_y,\\ \left[m_o(\bar{P})\right]_y&=zP_x-xP_z,\\ \left[m_o(\bar{P})\right]_z&=xP_y-yP_x.\end{aligned}\right\} \qquad (1.32)$$

3. Пара сил. Момент пари сил

Пара сил - це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил, що прикладені до одного тіла.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.16), до якого в точках А і В прикладені сили P_x і P_2, ($P_x = P_2$ і P_x ІПРД - це до тіла прикладена пара сил (P_1, P_2).

Площина, у якій розташовані сили пари, має назву площини дії пари. Пара сил не має рівнодійної сили, тому вона не може бути зрівноважена однією силою, і характеризується моментом, що викликає поворот тіла під дією сил пари у площині дії пари.

Моментом пари називається взятий з відповідним знаком добуток однієї з сил пари на плече пари. Плече пари — це відстань (по перпендикуляру) між лініями дії сил, які складають пару.

Момент пари вважається додатним, якщо пара намагається повертати тіло проти годинникової стрілки і, навпаки, - від’ємним, якщо пара намагається повертати тіло за годинниковою стрілкою.

Момент пари за модулем позначається $m(P_x, P_2)$. Визначимо момент пари сил, яка зображена на рис. 1.16.

$$m(\overline{P}_1, \overline{P}_2) = P_1 h.$$

Момент пари сил можна уявити вектором. Цей вектор перпендикулярний до площини дії пари і напрямлений у той бік, з якого можна побачити поворот тіла під дією пари проти годинникової стрілки (правило свердлика). Момент $m(P_x, P_2)$ як вектор показаний на рис. 1.16. Проте, момент пари сил як вектор не має фіксованої точки прикладення, він є вільним вектором.

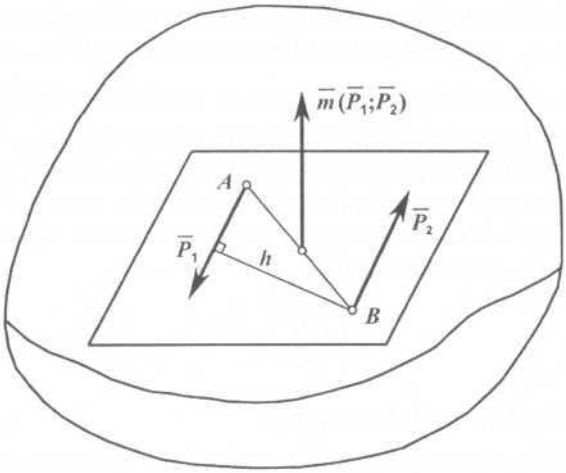


Рис. 1.16.

Властивості пари сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил будуть еквівалентними, якщо при всіх інших рівних умовах їхня дія на тіло однакова. Оскільки дія пари сил характеризується її моментом, то пари сил, що розміщені в одній площині, є еквівалентними, якщо вони мають однакові моменти (однакові за величиною та напрямком).

З цих положень випливають основні властивості (умови еквівалентності) пар сил:

- не змінюючи дії на тіло, пару сил можна повертати на будь-який кут та переносити, як завгодно, у площині її дії в межах даного тіла;
- дія пари на тіло не зміниться, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площина дії залишалися незмінними;
- якщо на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати. Якщо всі пари даної системи пар розташовані в одній площині, то момент

підсумкової або рівнодійної пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Питання для самоконтролю

1. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладення?
2. Чому дорівнює рівнодійна двох протилежно спрямованих паралельних сил? Де знаходиться точка її прикладення?
3. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
4. Куди спрямований вектор моменту сили відносно точки?
5. Що таке пара сил або просто пара?
6. Які властивості має пара сил у площині?
7. Як визначити момент пари? Куди спрямований момент пари як вектор?
8. Яка умова рівноваги системи пар у площині?
9. Які дві пари є еквівалентними?
10. Якими трьома параметрами характеризуються пари сил і моменти сил відносно центра?

Лекція 4. Плоска система довільних сил. Додавання сил і умови рівноваги

План

1. Система сил, довільно розташованих у площині. Лема про паралельне перенесення сили.
2. Зведення плоскої системи довільних сил до даного центра. Метод Пуансо
3. Теорема Варіньона про момент рівнодійної системи збіжних сил
4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил

1. Система сил, довільно розташованих у площині. Лема про паралельне перенесення сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла, довільно розташовані в одній площині, то така система сил є плоскою системою довільних сил.

Розглянемо лему про паралельне перенесення сили, що прикладена до тіла. Візьмемо довільне тіло, до якого в точці A прикладена сила P_x з лінією дії APY (рис. 1.17, *а).* Виберемо на тілі другу точку B і проведемо крізь неї пряму, яка паралельна прямій MN. Прикладемо на цій прямій у точці B зрівноважену систему сил $P_2 = -P_3$, модулі усіх трьох сил виберемо однаковими (рис. 1.17, б):

$$\boldsymbol{P_X=P_2=P_3}. \qquad (1.36)$$

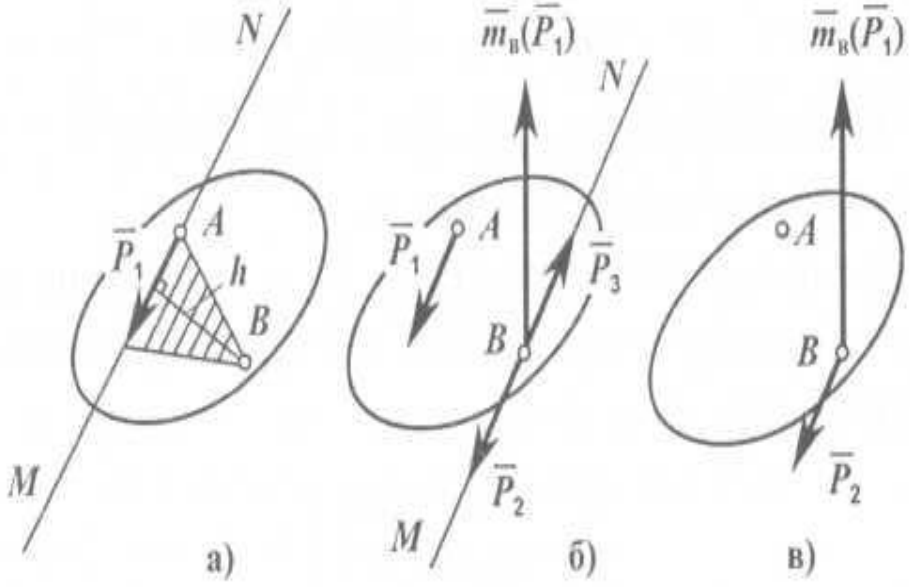


Рис. 1.17

Тепер, як легко побачити з рис. 1.17, б, сили P_1і P_3 можна об'єднати у пару сил ($P_1 = P_3$, $P_1 // P_3$) і замінити моментом $m(P_1,P_3)$ пари. Модуль моменту цієї пари дорівнює моменту даної сили P_x відносно точки B:

$$m(\overline{P}_1, \overline{P}_3) = P_1 \cdot h = m_B(\overline{P}_1).$$

Отже, остаточно маємо силу P_x, яка перенесена паралельно в точку B (сила P_2, $P_2 = P_x$) і, так звану, "приєднану" пару (P_XP_3) момент якої дорівнює моменту сили P_x, що переноситься, відносно точки B (рис. 1.17, в).

Таким чином, лему можна сформулювати так: *при паралельному перенесенні сили в іншу точку тіла рівновага його не зміниться, якщо додати, так звану, "приєднану" або компенсаційну пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно точки, у яку сила переноситься.*

2. Зведення плоскої системи довільних сил до даного центра. Метод Пуансо

Уявимо довільне тіло, що знаходиться під дією системи сил P_x, P_2, P_3,..., P_n, лінії дії яких розміщені у площині рисунка і розташовані довільно (рис. 1.18, *а)*. Виберемо на тілі довільну точку O як центр зведення. Перенесемо у центр зведення всі сили, які діють на тіло, паралельно
самим собі (якщо лінія дії сили перетинає точку O, то ця сила просто переноситься по лінії дії у центр зведення).

Розпочнемо з сили P_1. Сила переноситься паралельно самій собі у точку O, але при цьому до тіла додається момент "приєднаної" пари сил, який дорівнює

$$m_1 = P_1 h_1 = m_o(\overline{P}_1).$$

моменту сили P_1 відносно точки O:

Тепер маємо силу P_1, яка прикладена до тіла у центрі зведення O, та приєднану до тіла пару сил із моментом m_1.

Подібно вчинимо і з рештою сил P_2, P_3,..., P_n. Всі вони переносяться паралельно самим собі у центр зведення O і при цьому до тіла додаються "приєднані" пари сил:

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= P_2 h_2 = m_o(\overline{P}_2), \\ m_3 &= P_3 h_3 = m_o(\overline{P}_3), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ m_n &= P_n h_n = m_o(\overline{P}_n). \end{aligned}\right\}$$

1.39

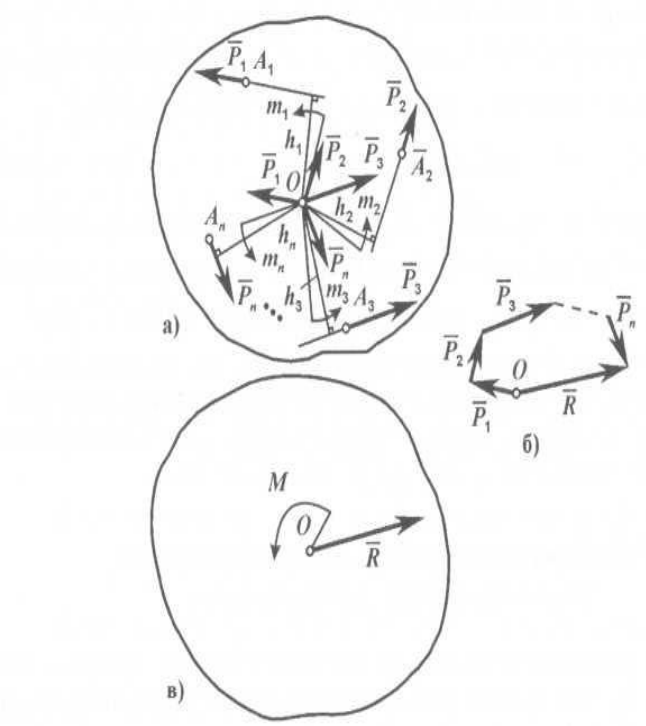


Рис 1.18

У результаті таких операцій до тіла в точці O прикладена плоска система збіжних сил P_x, P_2, P_3,..., P_n і на тіло діє система пар сил із моментами m_x, m_2, m_3,..., m_n, величини яких визначаються залежностями (1.38) і (1.39).

Систему збіжних сил у точці O можна замінити однією силою E, головним вектором плоскої системи довільних сил. Для цього необхідно геометрично додати систему збіжних сил, прикладених у центрі зведення O, тобто побудувати силовий многокутник (рис. 1.18, б):

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{P}_k.$$

1.40

Систему пар сил, яка тепер прикладена до тіла, також можна додати, отримавши головний момент плоскої системи довільних сил, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} m_o\left(\overline{P}_k\right).$$

Таким чином, плоска система довільних сил може бути зведена до двох силових факторів: однієї сили Е — головного вектора системи і однієї пари сил із моментом М - головного моменту системи (рис. 1.18, в).

Головний вектор системи дорівнює геометричній сумі векторів складових сил, а головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно центра зведення.

Головний вектор А і головний момент М плоскої системи довільних сил мають деякі особливості.

Так, величина головного вектора Е не залежить від положення центра зведення, а величина головного моменту М залежить від зміни положення центра зведення. А якщо головний вектор Е дорівнює нулю, то головний момент М буде незалежним від вибору центра зведення. Якщо ж головний момент М дорівнює нулю, то головний вектор Е буде рівно дійною плоскої системи сил.

Визначимо аналітично головний вектор та головний момент плоскої системи довільних сил. Для головного вектора Е спочатку визначимо його проекції на осі

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} P_{kx},$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{n} P_{ky},$$

плоскої декартової системи координат (відповідно до теореми про проекцію рівнодійної сили на вісь):

де $P_{кх}$, $P_{ку}$ - проекції /с-тої сили системи на відповідні осі координат.

Визначивши проекції головного вектора на осі координат, отримаємо модуль головного вектора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Головний момент *M* визначається алгебраїчним додаванням моментів складових сил відносно центра зведення *O,* а саме:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k = m_o(\overline{P}_1) + m_o(\overline{P}_2) + \ldots + m_o(\overline{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} m_o(\overline{P}_k). \qquad (1.44)$$

Окремі випадки зведення плоскої системи довільних сил до даного центра

Розглянемо окремі випадки, які можуть мати місце при зведенні плоскої системи довільних сил до даного центра:

1. Головний вектор К = 0, а головний момент М Ф 0. У цьому випадку величина головного моменту М не залежить від вибору центра зведення.

2. Головний момент М = 0, а головний вектор Е ^0. У даному випадку головний вектор R є рівнодійною силою системи сил.

3. Теорема Варіньона про момент рівнодійної системи збіжних сил

Момент рівнодійної системи збіжних сил відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того ж центра.

Доведення. Маємо довільне тіло, до якого в точці А прикладена система збіжних сил P_x, P_2, P_3, ..., P_n, яка зведена до рівнодійної сили R (рис. 1.19). Виберемо довільну точку *O* (центр) і визначимо відносно неї моменти всіх сил. Починаємо з сили P_1. Знайдемо її момент відносно точки *O.* Спочатку з'єднаємо

$$m_o(\overline{P}_1) = 2S\Delta OAB.$$

прямими лініями початок і кінець вектора сили із точкою *O.* Проведемо крізь точку *O* пряму, яка перпендикулярна прямій *O A ,* і будемо вважати цю пряму віссю *x* (тобто задамо її напрямок). Момент сили P_1 відносно точки *O* є подвійною площею трикутника *OAB,* тобто

Визначимо площу цього трикутника. Як відомо, це є половина добутку основи (у нашому випадку це сторона *О А*) на висоту трикутника *й.* А висота у даному випадку дорівнює проекції вектора сили P_x на вісь *х*- $P_{}x$. Таким чином, момент сили $P_{}$ відносно точки *О* дорівнює:

$$m_o(\overline{P}_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} OA \cdot P_{1x} = OA \cdot P_{1x}.$$

Аналогічно обчислимо моменти інших сил системи:

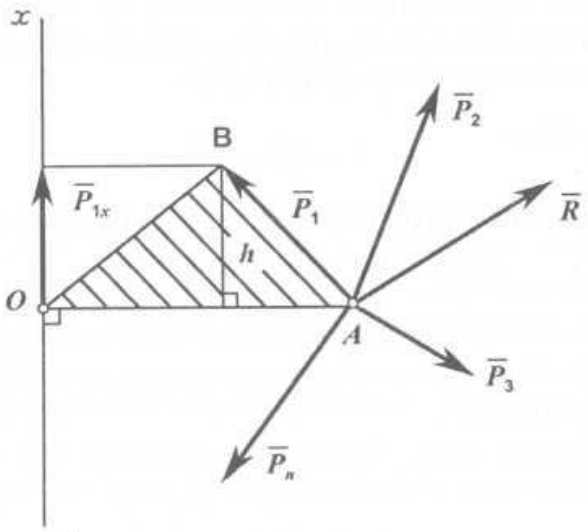


Рис. 1.19.

$$\left.\begin{aligned} m_o(\overline{P}_2) &= OA \cdot P_{2x}, \\ m_o(\overline{P}_3) &= OA \cdot P_{3x}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_o(\overline{P}_n) &= OA \cdot P_{nx}. \end{aligned}\right\}$$

Тепер перейдемо до рівнодійної *R* системи сил і таким же чином визначимо її момент відносно точки *О:*

$$m_o(\overline{R}) = OA \cdot R_x,$$

де R_x - проекція рівнодійної сили *Я* на вісь *х.*

Згідно теореми про проекцію рівнодійної сили на вісь, яка дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на цю вісь, можна записати:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot R_x = OA(P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \ldots + P_{nx}).$$

Розкриваючи дужки, матимемо:

$$m_o(\bar{R}) = OA \cdot P_{1x} + OA \cdot P_{2x} + OA \cdot P_{3x} + \ldots + OA \cdot P_{nx}.$$

Права частина даного виразу містить моменти складових сил P P_2, P_3, P_n відносно точки O. Остаточно отримаємо:

$$m_o(\bar{R}) = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \ldots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} m_o(\bar{P}_k).$$

Таким чином, з останнього виразу видно, що момент рівнодійної сили відносно будь-якого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових системи сил відносно того ж центра.

Теорема доведена.

4. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил

Як доведено, плоска система довільних сил завжди може бути зведена до однієї сили, яка має назву головного вектору системи, і однієї пари - головного моменту системи.

Тоді для рівноваги плоскої системи довільних сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор *Я* і головний її момент *M* дорівнювали нулю.

$$\left.\begin{aligned} \bar{R} &= 0, \\ M &= 0, \end{aligned}\right\}$$

або через проекції головного вектору:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= 0, \\ R_y &= 0, \\ M &= 0, \end{aligned}\right\}$$

отримуємо умови рівноваги:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} &= 0,\\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} &= 0,\\ \sum_{k=1}^{n} m_o\left(\overline{P}_k\right) &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Таким чином, для рівноваги тіла, що перебуває під дією плоскої системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі координат і сума моментів всіх сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

Існують дві інші форми системи умов рівноваги плоскої системи довільних сил:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} &= 0,\\ \sum_{k=1}^{n} m_A\left(\overline{P}_k\right) &= 0,\\ \sum_{k=1}^{n} m_B\left(\overline{P}_k\right) &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Але на дану систему умов рівноваги накладається обмеження: пряма, яка може з’єднати точки А і В, відносно яких визначаються суми моментів сил, не повинна бути перпендикулярною до осі (у даному випадку осі х), на яку проектуються сили.

Третя форма системи умов рівноваги має такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\overline{P}_k\right) &= 0,\\ \sum_{k=1}^{n} m_B\left(\overline{P}_k\right) &= 0,\\ \sum_{k=1}^{n} m_C\left(\overline{P}_k\right) &= 0.\end{aligned}\right\}$$

На цю систему умов рівноваги також накладається обмеження: точки А, В і С, відносно яких визначаються суми моментів усіх сил, не повинні бути розміщені на одній прямій.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
2. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
3. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
4. В якому випадку плоска система довільних сил зводиться до рівнодійної?
5. Чи залежить головний вектор від вибору центра зведення?
6. В якому випадку головний момент не залежить від вибору центра зведення?
7. Сформулюйте теорему Варіньона про момент рівнодійної сили відносно центра.
8. Які умови рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи де вільних сил?
9. Три форми умов рівноваги плоскої системи довільних сил.
10. Яке обмеження накладається на третю форму системи умов рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи довільних сил?

Лекція 5. Рівновага системи тіл

План

1. Зосереджені сили та розподілені навантаження Задачі статики.
2. Плоска система паралельних сил. Умови рівноваги Основні типи в’язей та їх реакції
3. Рівновага системи тіл
4. Статично означені та статично неозначені задачі
5. Методика розв’язування задач на рівновагу системи тіл

1. Зосереджені сили та розподілені навантаження

Ми розглядали сили, які були представлені у вигляді вектора, прикладного до точки. Проте у природі існує велика кількість взаємодій тіл, які здійснюються не в точці і, які не можна уявити у вигляді вектора, прикладеного до точки.

Такими силовими факторами є сили тиску рідини або газу на поверхню твердих тіл, сили тяжіння, як масові сили, електромагнітні сили тощо. А тому в теоретичній механіці вводиться поняття про розподілені сили, які діляться на поверхневі та об’ємні.

Поверхневі сили діють на деяку поверхню тіла. Об’ємні сили діють на кожний елемент об’єму тіла, яке розглядається. Прикладом останніх сил і є сила тяжіння, або сила ваги.

У теоретичній механіці розглядається дія на тіло тільки зосереджених сил, які прикладені до абсолютно твердих тіл. А тому розподілене навантаження необхідно замінити його рівнодійною, тобто зосередженою (и пою. Введемо декілька загальних положень.

Розподілене навантаження характеризується його інтенсивністю q тобто величиною сили, яка припадає на одиницю об’єму тіла (у випадку об’ємних сил), на одиницю площі (у випадку поверхневих сил) та на одиницю довжини (якщо поверхню, на яку діє навантаження, можна вважати шиєю, тобто шириною поверхні можна знехтувати). В останньому випадку розподілене навантаження має назву плоского, на силових схемах воно зображується у вигляді епюри

елементарних сил, тобто графіка інтенсивності навантаження, яке прикладене до лінійного елементу тіла.

У загальному випадку розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає даний закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці тіла (рис. 1.22). Напрямок дії навантаження показується стрілками.

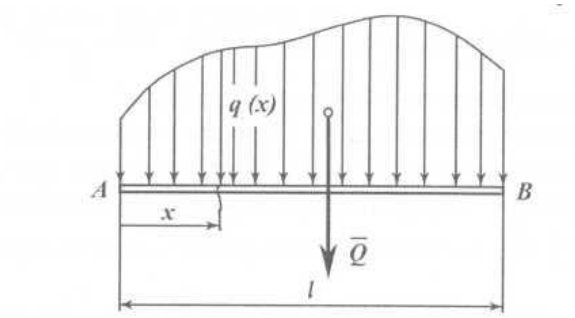


Рис. 1.22

Спочатку розглянемо рівномірно розподілене навантаження та навантаження, яке розподілене за лінійним законом. Замінюємо розподілене навантаження зосередженою силою.

Розглянемо ці два випадки:

а) рівномірно розподілене навантаження (або навантаження, яке розподілене за законом прямокутника) зображується на схемах у вигляді прямокутника, розміри якого такі: висота - це інтенсивність навантаження д, довжина - це довжина L ділянки тіла, на якій діє навантаження. Стрілки показують напрямок дії навантаження (рис. 1.23). Для того, щоб замінити це навантаження рівнодійною силою *0,* треба визначити її. У даному випадку

$$Q = q \cdot l,$$

де д - інтенсивність навантаження, *[Н/м]; І* - довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, [л/].

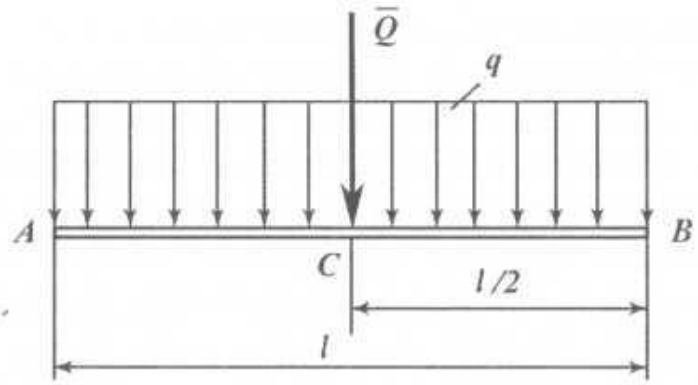


Рис.1.23

Точка *С* прикладення рівнодійної сили *<2* розміщується посередині ділянки тіла, на якій діє навантаження. Тобто *АС = 1/2 = СВ,* а напрямок співпадає з напрямком розподіленого навантаження.

б) навантаження розподілене за лінійним законом (тобто за законом трикутника). У цьому випадку (рис. 1.24) інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці / змінюється від 0 до максимального значення $д_{max}$. Рівнодійна сила *2* від цього навантаження за величиною дорівнює:

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot l .$$

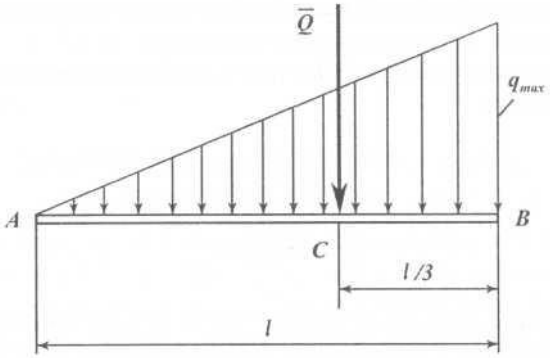


Рис. 1.24.

Точка *С* прикладення рівнодійної *0* розташована на відстані *АС* =2/3 l або *ВС*=1/3 l напрямок співпадає з напрямком навантаження.

2. Плоска система паралельних сил. Умови рівноваги

Якщо лінії дії усіх сил паралельні, то завжди у площині можна так розташувати осі координат, що одна з них буде обов’язково паралельною заданим

силам, а друга - перпендикулярною. А тому, щоб тіло під дією плоскої системи паралельних сил перебувало у рівновазі, необхідно прирівняти до нуля алгебраїчну суму проекцій усіх сил на паралельну вісь і алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно довільної точки. У даному випадку система умов рівноваги (1.54) спрощується і буде мати такий вигляд:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0,\\ \sum_{k=1}^{n} m_A\left(\overline{P}_k\right) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, яка паралельна силам[2], і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно довільної точки А площини дорівнювали нулю.

Для системи паралельних сил на площині можна використовувати і такі умови рівноваги:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\overline{P}_k\right) = 0,\\ \sum_{k=1}^{n} m_B\left(\overline{P}_k\right) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією системи паралельних сил на площині, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно будь-яких двох точок площини дорівнювали нулю.

Проте, для цих умов існує обмеження: лінія АВ, якою можна з’єднати центри моментів, не повинна бути паралельною силам.

Дані умови (1.60) найбільш придатні при розрахунках двоопорних балок. Використовуючи ці умови, складають алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно точок А і В, у яких встановлені опори балки.

3. Рівновага системи тіл

Системою тіл називається сукупність декількох тіл, які або спираються одне на одне, або з’єднані шарнірами, що дають можливість відносного руху тіл.

При розв’язанні задач на систему тіл розрізняють сили зовнішні та внутрішні.

Зовнішні сили - це сили взаємодії тіл даної системи з іншими тілами, які не входять до складу системи.

Внутрішні сили - це сили взаємодії між окремими тілами, які врадять до складу даної системи. Внутрішні сили існують попарно, як дія і протидія.

4. Статично означені та статично неозначені задачі

Задача є статично означеною, якщо для неї можна скласти таку кількість рівнянь рівноваги матеріальної системи, яка не менша, ніж число невідомих.

Задача є статично неозначеною, якщо число рівнянь рівноваги системи менше, ніж число невідомих.

У теоретичній механіці розглядаються тільки статично означені матеріальні системи.

5. Методика розв’язування задач на рівновагу системи тіл

Рівновагу системи тіл можна розглядати в цілому під дією тільки зовнішніх сил. Але, може так статись, що кількість рівнянь рівноваги буде меншою, ніж кількість невідомих. Тоді необхідно розглядати рівновагу окремих тіл системи, умовно розділяючи її обов’язково по внутрішніх в’язях. Причому необхідно враховувати, що внутрішні сили реакцій входять попарно, як дія та протидія.

Розглянемо приклад розв’язування задач на рівновагу системи тіл.

Питання для самоконтролю

1. Що таке зосереджене та розподілене навантаження?
2. Як замінити рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою?
3. Як замінити розподілене за лінійним законом навантаження зосередженою силою?
4. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?

Зосереджені сили та розподілені навантаження Задачі статики.

6. Плоска система паралельних сил. Умови рівноваги Основні типи в’язей та їх

реакції

7. Рівновага системи тіл

8. Статично означені та статично неозначені задачі

9. Методика розв’язування задач на рівновагу системи тіл

Лекція 6. Плоскі ферми і їх розрахунок

План

1. Ферма. Розрахунок ферми.
2. Метод вирізування вузлів Рівновага системи тіл
3. Метод Ріттера

1. Ферма. Розрахунок ферми Ферма - це жорстка конструкція, яка складається із прямолінійних стрижнів, сполучених між собою шарнірами. Місце, де стрижні з’єднуються один з одним, носить назву вузла ферми. Зовнішнє навантаження прикладається до ферми тільки в її вузлах. Допускається, що ферма складається із ідеальних стрижнів, тобто тонких, однорідних, невагомих стрижнів, на кінцях яких є шарніри, стрижні працюють на розтяг або на стиск. Ми будемо розглядати такі ферми, у яких осі всіх стрижнів і вектори зовнішніх сил розміщуються в одній площині, тобто, плоскі ферми. Крім цього, конструктивно ферма складається із стрижнів, які утворюють собою трикутники, тобто в конструкції ферми немає зайвих стрижнів. Такі ферми є жорсткими та статично

$$n = 2m - 3.$$

визначеними. В них число стрижнів п та число вузлів т завжди зв’язане таким співвідношенням:

Розрахунок ферми зводиться до визначення зовнішніх опорних реакцій та внутрішніх реакцій (зусиль) у стрижнях. Зусилля і реакція стрижня співвідносяться між собою, як дія і протидія (рівні за модулем та протилежні за напрямом).

Розглянемо просту плоску ферму (рис. 1.26).

Як бачимо зі схеми - це плоска конструкція, яка складається із 7 стрижнів, що з’єднуються у 5 вузлах. У вузлах I та V ферма має опори (у 1-му вузлі -

нерухома шарнірна опора; у У-му - рухома шарнірна опора), до II та до IV вузлів ферми прикладені зовнішні навантаження у вигляді зосереджених сил P_1 та P_2 (1^=30[£//]; P_2=10[/сЯ]). Лінійні та кутові розміри ферми дані на схемі (а = 45°). Осі плоскої декартової системи координат I ху показані на схемі ферми.

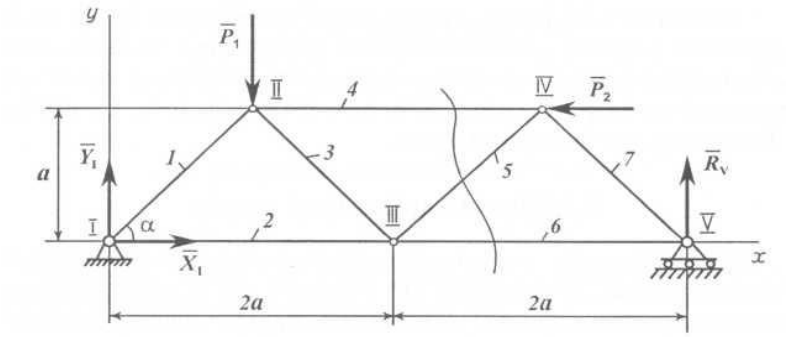


Рис. 1.26.

Перший етап розрахунку ферми - це визначення її опорних реакцій. Визначають опорні реакції, розглядаючи ферму в цілому, як тверде тіло з прикладеними зовнішніми силами. Тоді, умовно звільнюючи ферму від в'язей (опор) і замінюючи їх відповідними реакціями (у вузлі I це реакції Х,, $У_I$; у вузлі V - $Р_у$), маємо плоску систему довільних сил, для якої можна використати умови

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0;\ X_1 - P_2 = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0;\ Y_1 - P_1 + R_V = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} m_1\left(\overline{P}_k\right) = 0;\ R_V \cdot 4a + P_2 \cdot a - P_1 \cdot a = 0.
\end{aligned}\right\}$$

рівноваги (1.54) і скласти систему рівнянь рівноваги:

З першого рівняння системи обчислюємо невідому реакцію $Х_г$ Вона дорівнює:

$$X_1 = P_2 = 10\ [kH].$$

З останнього рівняння обчислюємо реакцію $Р_у$:

$$R_V = \frac{P_1 - P_2}{4} = \frac{30 - 10}{4} = 5\ [kH].$$

Далі, з другого рівняння є можливість обчислити останню невідому величину $У_I$:

$$Y_1 = P_1 - R_y = 30 - 5 = 25 \ [kH].$$

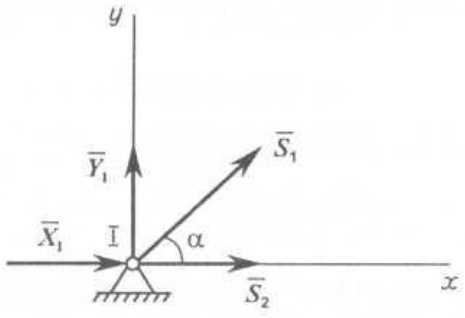
Таким чином, обчислено шукані реакції опор ферми. Тепер необхідно визначити невідомі зусилля в стержнях ферми. Існує декілька способів визначення цих зусиль, графічні і аналітичні. Ми розглянемо два аналітичні методи: метод вирізування вузлів та метод перерізів (або метод Ріттера). Розглянемо послідовно ці методи.

2. Метод вирізування вузлів

Цей метод полягає в послідовному вирізуванні (уявно) вузлів ферми, починаючи з вузла, де збігаються два стрижні з невідомими внутрішніми зусиллями (реакціями). Таким чином, кожний вузол є плоска система збіжних сил, для якої можна скласти два рівняння рівноваги, з яких визначають невідомі зусилля у цих двох стрижнях.

При застосуванні цього методу приймається правило, за яким реакції стрижнів спрямовуються від вузлів. Якщо ж при визначенні реакції стрижня станеться, що вона має від'ємний знак, то цей стрижень стиснутий і дійсний напрямок його реакції орієнтований протилежно до вузла.

Визначимо даним методом зусилля в стрижнях ферми, яка наведена на рис. 1.26. Вирізаємо спочатку вузол 1 (рис. 1.27). Крім реакцій X, та $У_1$ до нього прикладені невідомі реакції стрижнів 1 і 2, які позначаються та S_2 і напрямок яких, за правилом, від вузла. Покажемо у цьому вирізаному вузлі I осі координат xly та кут α. Як видно зі схеми, вузол 1 перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил з двома невідомими зусиллями і S_2. Складемо для вузла I рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги для плоскої системи



збіжних сил у вигляді (1.18):

Рис. 1.27

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad X_1 + S_2 + S_1 \cos\alpha = 0,\\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad Y_1 + S_1 \sin\alpha = 0.\end{aligned}\right\}$$

З другого рівняння визначаємо зусилля

$$S_1 = -\frac{Y_1}{\sin\alpha} = -\frac{25}{0,707} = -35,3 \ [kH].$$

Як легко побачити, стрижень 3 стиснутий зусиллям 35,3 [кН]. З першого рівняння визначимо невідоме зусилля S_2:

$$S_2 = -X_1 - S_1 \sin\alpha = -10 - (-35,3 \cdot 0,707) = -10 + 25,00 = 15,00 \, [kH].$$

Таким чином, стрижень 2 розтягнений зусиллям 15,00 [кН].

Далі вирізаємо вузол II (рис. 1.28). У цьому вузлі зосереджені зовнішня сила P_1 та реакції трьох стрижнів S_3 та S_4. Причому невідомі реакції тільки у двох стрижнях - у 3 (S_3) та у 4 (S_4). Також попередньо вважаємо, що стрижні 3 і 4 розтягнуті і їх реакції S_3 і S_4 напрямлені від вузла II. Зусилля ж у стрижні 1 вже визначено раніше, при вирізанні першого вузла, і не тільки встановлено його значення, але й те, що він стиснутий, а тому напрямок його реакції S_1 буде до вузла II. Проведемо крізь вузол II осі координат та покажемо кут α.

Складемо для вузла П рівняння рівноваги, також використовуючи умови, які аналогічні (1.18):

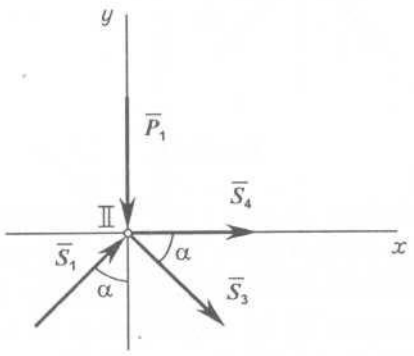


Рис. 1.28.

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad & S_4 + S_3\cos\alpha + S_1\sin\alpha = 0,\\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad & -S_3\sin\alpha + S_1\cos\alpha - P_1 = 0.\end{aligned}\right\}$$

З другого рівняння визначаємо зусилля S_3:

$$S_3 = \frac{S_1\cos\alpha - P_1}{\sin\alpha} = \frac{35{,}3\cdot 0{,}707 - 30}{0{,}707} = -\frac{5{,}00}{0{,}707} = -7{,}00\,[kH].$$

Як легко побачити, стрижень 3 стиснутий зусиллям 7,00 [кН.]. Напрямок реакції S_3 - до вузла II.

З першого рівняння знаходимо зусилля S_4:

$$S_4 = -S_1\sin\alpha - S_3\cos\alpha = -35{,}30\cdot 0{,}707 - (-7{,}00)\,0{,}707 =$$
$$= -25{,}00 + 5{,}0 = -20{,}00\ [kH].$$

Таким чином, стрижень 4 стиснутий зусиллям 20,00 [кН.].

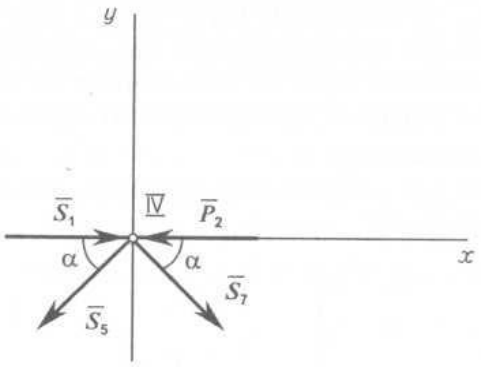


Рис. 1.29.

Далі вирізаємо вузол IV (рис. 1.29). Він перебуває під дією зовнішньої сили P_2 та зусиль у стрижнях 4, 5 та 7. Зусилля у стрижні 4 визначено і його напрямок - до вузла, а тому шукані невідомі - тільки зусилля 5_5 та 5_7. Проведемо крізь вузол IV осі координат xy та покажемо кут ос. Напрямки зусиль у стрижнях 5 і 7 - від вузла IV. Складемо для вузла IV рівняння рівноваги, також використовуючи умови рівноваги (1.18):

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad & S_4 - P_2 - S_5\cos\alpha + S_7\cos\alpha = 0,\\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad & -S_5\sin\alpha - S_7\sin\alpha = 0.\end{aligned}\right\}$$

$$S_5 = -\frac{S_7\sin\alpha}{\sin\alpha} = -S_7.$$

Розв’язуємо систему (1.65), для чого з другого рівняння виразимо зусилля S_5 через зусилля S_7:

Тепер підставимо значення S_5 у перше рівняння системи

$$S_7 \cos\alpha - (-S_7)\cos\alpha - P_2 + S_4 = 0.$$

$$S_7 = \frac{P_2 - S_4}{2\cos\alpha} = \frac{10-20}{2 \cdot 0,707} = -7,00\,[kH].$$

Звідки

Стрижень 7 стиснутий зусиллям 7,00 [кН.]. Тепер маємо можливість знайти зусилля S_5:

$$S_5 = -S_7 = 7,00\,[kH].$$

Стрижень 5 розтягнутий зусиллям 7,00 [кН].

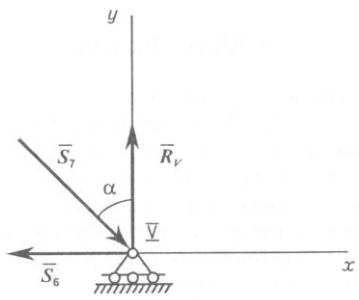


Рис. 1.30.

Тепер, для остаточного визначення зусиль у стрижнях ферми, що розглядається, необхідно вирізати вузол V. До вузла V прикладена реакція Rv зусилля S_7, яке напрямлене до вузла, та невідоме зусилля S_6, яке напрямляємо від вузла. Складемо для вузла V рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.18):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad S_7 \sin\alpha - S_6 = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad R_V - S_7 \cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\}$$

Як легко побачити, для визначення останнього невідомого зусилля S_6 достатньо розв’язати перше рівняння системи (1.66):

$$S_6 = S_7 \cos\alpha = 7,00 \cdot 0,707 = 5,00\,[kH].$$

Стрижень 6 розтягнутий зусиллям 5,00 [А//].

Дані розрахунків заносимо в таблицю 1.1. Знак при визначеному зусиллі у стрижні характеризує його навантаження. Якщо знак додатний (+), то стрижень розтягнутий, якщо від'ємний (—), то стрижень стиснутий.

Таблиця 1.1.

№ стрижнів	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля в [кН]	-35,30	+ 15,00	-7,00	-20,00	+7,00	+5,00	-5,00

3. Метод Ріттера

Розглянемо другий аналітичний метод визначення зусиль у стрижнях плоскої ферми. Це - метод Ріттера або метод перетинів.

Даний метод має декілька переваг у порівнянні з розглянутим раніше методом вирізування вузлів. Тут немає необхідності складати велику кількість рівнянь рівноваги вузлів, особливо якщо ферма багатостижнева. Крім того, у разі неточності розрахунку величини реакції якогось стрижня в подальшому ця помилка накопичується при розрахунках інших стрижнів. Метод Ріттера позбавлений цих незручностей.

Особливості застосування цього методу полягають у тому, що умовно робиться перетин усієї ферми, при цьому в перетині повинно бути не більше ніж три стрижні з невідомими зусиллями. Тоді розглядається рівновага однієї з частин ферми, а друга частина відкидається. Дію стрижнів, які попали в перетин, замінюємо їх реакціями. Попередньо вважається, що ці стрижні також розтягнуті, тобто їх зусилля напрямлені від вузлів. Опорні реакції ферми визначаються так само, як і при застосуванні метода вирізування вузлів.

Визначимо зусилля у 4, 5 та 6 стрижнях ферми, зробивши перетин і розглядаючи рівновагу правої частини ферми (рис. 1.31). Замість вказаних стрижнів прикладаємо у вузлі IV зусилля S_4 та S_5, а у вузлі V - зусилля S_6. Напрямки вказаних зусиль - від вузлів. До даної частини ферми прикладена зовнішня сила P_2 та реакція . Покажемо осі прямокутної декартової системи

координат $У_{xy}$ та кут а. Як можна побачити, дана частина ферми перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил, а тому складемо для неї рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.54). Згідно з методом Ріттера треба складати рівняння рівноваги, як суми моментів сил відносно тих точок, де перетинаються лінії дії більшої кількості невідомих зусиль. У даному випадку такими точками будуть вузли III і IV. Відносно цих точок візьмемо суми моментів сил:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad R_V - S_5 \sin\alpha = 0, \\
&\sum_{k=1}^{n} m_{III}\left(\overline{P}_k\right) = 0; \quad P_2 \cdot a + S_4 \cdot a + R_V \cdot 2a = 0, \\
&\sum_{k=1}^{n} m_{IV}\left(\overline{P}_k\right) = 0; \quad R_V \cdot a - S_6 \cdot a = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Обчислимо невідомі зусилля. З першого рівняння знайдемо зусилля S_5:

$$S_5 = \frac{R_V}{\sin\alpha} = \frac{5}{0{,}707} = 7{,}00\ [kH].$$

З другого рівняння знайдемо зусилля S_4. Воно буде дорівнювати:

$$S_4 = \frac{-P_2 \cdot a - R_V \cdot 2a}{a} = -P_2 - 2R_V = -20{,}00\ [kH].$$

З останнього рівняння визначимо зусилля S_6:

$$S_6 = R_V = 5{,}0\ [kH].$$

Таким чином, стрижень 4 стиснутий зусиллям 20,00 [кН\, напрямок зусилля S_4 буде протилежний тому, що показаний на рис. 1.31.

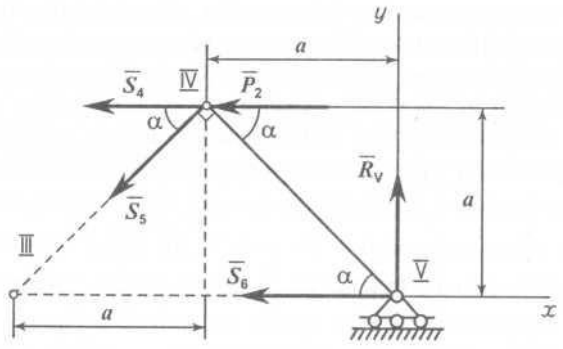


Рис. 1.31.

Питання для самоконтролю

1. Яку конструкцію називають фермою?
2. Яка ферма буде статично визначеною?

3. Що означає розрахувати ферму?
4. У чому полягає суть аналітичного методу вирізування вузлів?
5. У чому полягає метод перетинів (метод Ріттера) при розрахунках ферми?
6. Скільки стрижнів з невідомими зусиллями можуть бути у зоні перетину?
7. Відносно яких точок складають суми моментів сил для відрізаної частини ферми?
8. Чому метод Ріттера називають ще методом трьох моментів?
9. Який порядок розрахунку плоскої ферми?
10. Яка різниця між реакцією і зусиллям у стрижні?

Лекція 7. Тертя ковзання та тертя кочення

План

1. Рівновага тіла з урахуванням тертя
2. Кут та конус тертя.
3. Рівновага тіла на похилій площині
4. Тертя кочення
5. Тертя нитки об циліндричну поверхню

1. Рівновага тіла з урахуванням тертя. Сили тертя ковзання

Розглянемо спочатку тертя ковзання.

Сили тертя ковзання — це сили, які виникають при ковзанні одного тіла по поверхні другого тіла і які спрямовані протилежно швидкості відносного руху тіла, гальмуючи рух. Розглянемо шорстку площину, по якій рівномірно рухається тіло вагою Q під, дією зовнішньої сили P (рис. 1.32). Складемо розрахунково-силову схему, розглядаючи всі сили, які діють на дане тіло. Як відомо, опорна площина, яку умовно вважаємо як гладеньку площину, створює нормальну реакцію поверхні або силу нормального тиску N, а в бік, протилежний напрямку дії сили P, буде діяти сила тертя $P_{тр}$, що виникає внаслідок контакту шорстких поверхонь тіл, вектор якої прикладений до

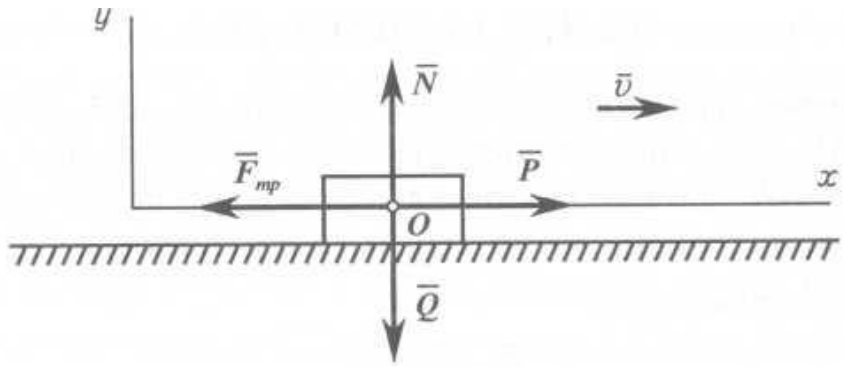


Рис. 1.32.

точки О. Покажемо осі координат ху. Оскільки тіло перебуває у стані рівноваги, то є можливість скласти рівняння рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил. Запишемо умови та рівняння рівноваги тіла:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad P - F_{mp.} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad N - Q = 0. \end{aligned}\right\}$$

З першого рівняння отримуємо $P = F_{тр}$, а з другого рівняння - N — 0- Таким чином, сила Р зрівноважаться силою тертя $F_{тр}$, а нормальний тиск тіла на площину N дорівнює вазі тіла

Що ж таке сила тертя? Як встановили французькі фізики Гільом Амонтон (1663-1705) та Шарль Кулон (1736-1806), сила тертя $F_{тр}$ пропорційна силі нормального тиску А:

$F_{mp.} = fN,$ де f - коефіцієнт пропорційності.

Як було встановлено пізніше, коефіцієнт пропорційності / є коефіцієнтом тертя ковзання. Спочатку вважалось, що коефіцієнт тертя ковзання / не залежить від величини площі контакту тіл, швидкості руху тіл та від інших факторів. Однак, подальші дослідження показали, що коефіцієнт тертя ковзання, навпаки, залежить від багатьох факторів: від матеріалу тіл, від стану поверхонь, що контактують, від температури, вологості тощо.

2 Кут та конус тертя

Розглянемо горизонтальну шорстку поверхню, на якій розташоване тіло (рис. 1.33). Як і в попередньому випадку, покажемо сили, що прикладені у точці Q: N — реакція поверхні або сила нормального тиску, сила тертя F Додаючи геометрично ці сили, отримаємо повну реакцію поверхні R. Вона буде дорівнювати $\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_{mp.}$.

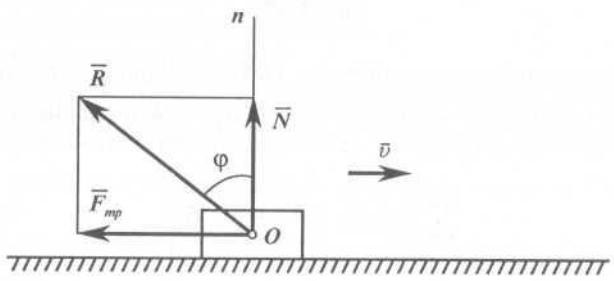


Рис. 1.33.

Тепер проведемо крізь точку О, де прикладені сили, нормаль п і покажемо кут φ, під яким реакція R відхилена від нормалі N.

Таким чином, кут тертя φ — це кут, який утворює рівнодійна нормального тиску N і сили тертя $F_{тр}$ (або повна реакція шорсткої поверхні N) з нормаллю п до поверхні в момент зрушення тіла з місця.

Визначимо кут тертя Q. Як легко побачити з рис. 1.33:

$$tg\,\varphi = \frac{F_{mp.}}{N}.$$

Проте, з виразу (1.69) маємо

$$f = \frac{F_{mp.}}{N}.$$

Якщо прирівняти ліві частини виразів (1.71) та (1.72), отримаємо

$$f = tg\varphi.$$

Таким чином, коефіцієнт тертя ковзання f дорівнює тангенсу кута тертя ер. З цього випливає, що коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною.

Визначити кут тертя також можна, якщо розглядати рівномірний рух тіла по похилій площині. Нехай площина, по якій рухається тіло вагою Q (рис. 1.34), нахилена до горизонту під деяким кутом ф, таким, що рух тіла буде рівномірним. Проведемо крізь точку О, де прикладені сили, нормаль п. Далі розкладемо вагу тіла Q на складові: Q sіп φ та Q cosφ. Складова Озіп ф намагається рухати тіло донизу, але цьому заважає сила тертя Fтр, напрямок якої протилежний напрямку складової бзіпер. Якщо показати осі координат х,у і вважати, що тіло перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи збіжних сил, то можна скласти систему двох рівнянь рівноваги у вигляді (1.18):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad -F_{mp.} + G\sin\varphi = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad N - G\cos\varphi = 0. \end{aligned}\right\}$$

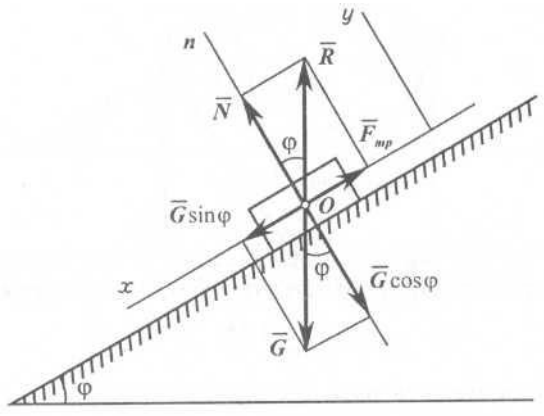


Рис. 1.34.

З першого рівняння отримаємо значення сили тертя:

$$F_{mp.} = G\sin\varphi,$$

а з другого рівняння отримаємо значення нормальної реакції похилої площини:

$$N = G\cos\varphi.$$

Далі, якщо підставити вирази (1.75) та (1.76) у вираз (1.72), матимемо:

$$f = \frac{F_{mp.}}{N} = \frac{G\sin\varphi}{G\cos\varphi} = tg\varphi.$$

Звідси можна побачити, що в даному випадку кут φ і є той кут, на який відхилена від нормалі п повна реакція К поверхні при геометричному додаванні сил А та Fтр. Цілком очевидно, що якщо кут нахилу похилої площини до горизонту буде більшим ніж ер, то тіло почне рухатись по похилій площині з деяким прискоренням.

Якщо змінювати напрямок зовнішньої сили Р, що прикладена до тіла, то напрямки сили тертя Fтр також будуть змінюватись. Тоді рівнодійна R повної реакції поверхні буде повертатись навколо вектора А, утворюючи конічну поверхню як твірна (рис. 1.35). У разі одного повного оберту реакції R навколо вектора N утворюється конус, кут якого при вершині дорівнює 2φ.

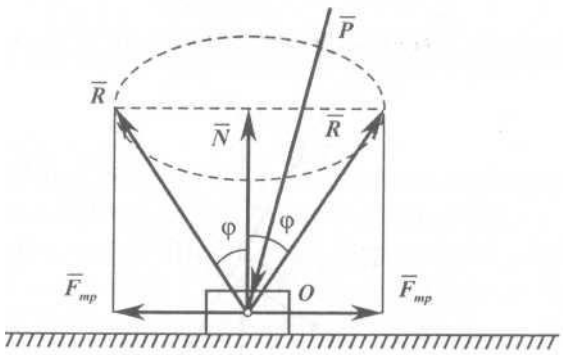


Рис. 1.35.

Таким чином, конус тертя - це круговий конус, кут якого при вершині дорівнює подвійному куту тертя.

З поняття конуса тертя випливає таке правило: якщо зовнішня сила Р, що прикладена до тіла, розташована всередині конуса тертя, то, якою б великою сила не була, вона не зможе зрушити тіло з місця (рис. 1.35). Це пов’язано з тим, що при збільшенні зовнішньої сили Р нормальна реакція N, тобто проекція сили на вертикаль, а з нею і сила тертя Fтр буде зростати швидше, ніж рушійна сила, що є проекцією сили Р на горизонталь. На цьому принципі розробляються клинові або стопорні механізми у верстатах.

3. Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло на похилій площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює α (рис. 1.36). Вага тіла дорівнює (Q, до нього прикладена зовнішня сила P_1, яка викликає рівномірний рух тіла вгору зі швидкістю V = const. Вважаємо, що тіло перебуває у стані рівноваги, а тому можна використати рівняння статики. Складемо розрахунково-силову схему. До тіла у точці О прикладена реакція поверхні А (або сила нормального тиску). сила тептя Р , напрямок якої протилежний напрямку руху тіла.

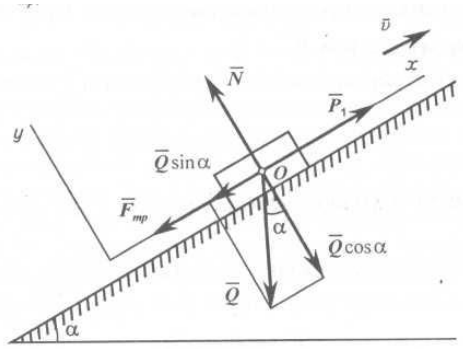


Рис. 1.36.

Складемо рівняння рівноваги у вигляді (1.18), враховуючи, що тіло перебуває пілі дією плоскої системи збіжних сил

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad P_1 - F_{mp.} - Q\sin\alpha = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad N - Q\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\}$$

З другого рівняння знаходимо реакцію поверхні №

$$N = Q\cos\alpha,$$

а з першого рівняння - значення сили /[:

$$P_1 = F_{mp.} + Q\sin\alpha.$$

Оскільки Ртр = то, враховуючи (1.79), матимемо

$$F_{mp.} = f Q \cos\alpha.$$

Підставимо вираз (1.81) у вираз (1.80), отримаємо

$$P_1 = f Q \cos\alpha + Q \sin\alpha = Q(\sin\alpha + f \cos\alpha).$$

Тепер, якщо не прикладати силу Р}, то тіло буде рухатись із прискоренням донизу. А тому, визначимо таку мінімальну силу Р2, при дії якої рух тіла донизу був би рівномірним і щоб тіло було у стані рівноваги (рис. 1.37). Складемо і для цього випадку розрахунково-силову схему. Вона буде відрізнятись від попередньої тим, що сила тертя Ртр буде за напрямком співпадати з силою Р2.

Складемо у цьому випадку рівняння рівноваги у вигляді (1.18):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad -P_2 - F_{mp.} + Q\sin\alpha = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad N - Q\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\}$$

Як і в попередньому випадку, визначимо силу Ртр . Вона буде дорівнювати м

$$F_{mp.} = f Q \cos\alpha.$$

Підставимо дане значення сили тертя Р у перше рівняння (1.83)

$$P_2 = Q\sin\alpha - f Q\cos\alpha = Q(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Порівняємо вирази (1.82) і (1.84). Як легко побачити, якщо зовнішня сила Р буде мати значення в межах Р2 < Р < Рх, то тіло буде у стані спокою, і використовувати формулу (1.69) для визначення сили тертя Р в цьому разі не можна.

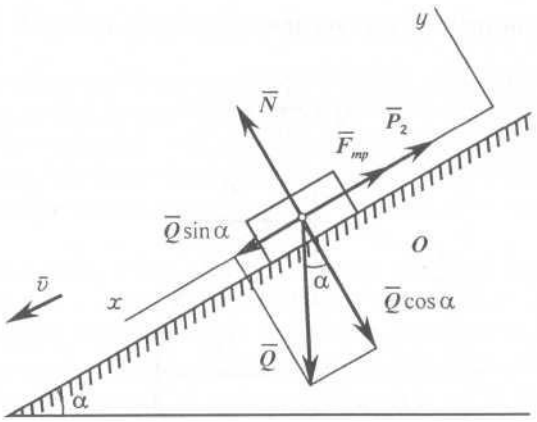


Рис. 1.37.

Вирази (1.82) та (1.84) можуть бути використаними при розв’язуванні задач на рівновагу тіла, що перебуває на похилій площині.

4. Тертя кочення

Тертям кочення називається опір, який утворюється при коченні одного тіла по поверхні другого. Уявимо коток радіусом 7?, який котиться (напрямок обертання показано стрілкою) по поверхні під дією сили Р, яка може бути прикладеною або до центра котка, або до його верхньої точки (рис. 1.38). На поверхні коток утворює колію, а тому попереду котка з боку поверхні діє нормальний тиск у вигляді розподіленого навантаження. Це навантаження можна замінити зосередженою силою N (рівнодійною реакцією), яка буде віддалена від вертикальної осі котка на величину к в момент зрушення котка з місця (відстань АС). Ця лінійна величина к, яка має розмірність довжини, називається коефіцієнтом тертя кочення або плечем пари кочення (£?, А).

Якщо коток рівномірно рухається, тобто коли = СОП8І, то сили, які до нього прикладені, зрівноважені. Визначимо алгебраїчну суму моментів усіх сил відносно точки А. Розглянемо спочатку перший випадок, якщо сила Рх прикладена до центра котка:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\overline{P}_k\right) = 0;$$

$$Nk - P_1 R = 0.$$

звідки

Оскільки момент опору кочення

$M_{оп.} = Nk$, то

то

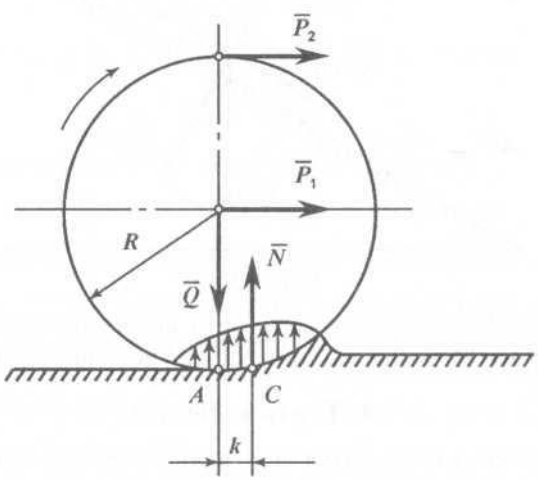


Рис. 1.38.

Розглянемо далі другий випадок, якщо сила P_α прикладена до верхньої точки котка. У цьому випадку рівняння рівноваги буде мати наступний вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{P}_k) = 0,$$
$$Nk - P_2 2R = 0.$$

Звідки

$$P_2 = \frac{Nk}{2R} = \frac{M_{оп.}}{2R}.$$

Якщо порівняти вирази (1.86) та (1.88), то можна бачити, що в другому випадку для зрушення котка з місця треба прикласти вдвічі менше зусилля Р, ніж у першому випадку.

5. Тертя нитки об циліндричну поверхню

Найбільш розповсюдженим типом передачі обертального руху є пасова передача, в якій рух від одного циліндричного шківа (ведучого) передається до

другого (веденого) за допомогою гнучкої в’язі, в даному випадку гумового паса. На ведучому валу, який примусово обертається і який охоплює гнучке тіло (нитка), виникають сили тертя, які і сприяють передачі зусиль.

Схематично (рис. 1.39) можна показати ведучий шків радіуса К, який рівномірно обертається у напрямку кругової стрілки. При цьому шків охоплює нитка (пас), кут обхвату якої на шківу дорівнює а. Позначимо зусилля, які виникають у нитці, таким чином: через Р з одного її кінця та через 2~з другого. Умовно можна показати сили тертя Ртр що виникають на циліндричній поверхні самого шківа, які мають напрямок, протилежний напрямку його обертання, а на поверхні нитки - рівні за величиною, але протилежно спрямовані сили тертя нитки об шків Р'тр.

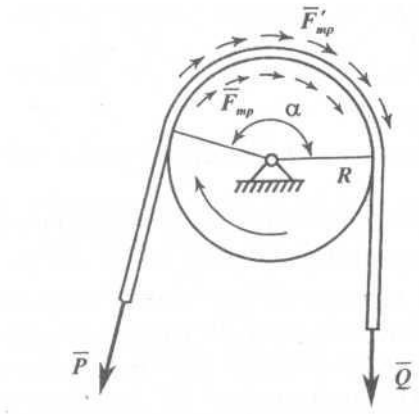


Рис. 1.39.

За допомогою основних положень “Статики”, розділу “Тертя”, визначимо зусилля Р та Q. Розглянемо взаємодію нитки з циліндричною поверхнею шківа і знайдемо співвідношення між силами Р та Q при заданому куті обхвату шківа ниткою - α [радіан].

Складемо силову схему (рис. 1.40), умовно розглядаючи шків, який рівномірно обертається, а нитка навпаки перебуває у відносному спокою.

Центр шківа позначимо буквою (9, його радіус R. Сили Р і Q прикладені відповідно в точках В і А нитки (там, де нитка сходить зі шківа), а тому центральний кут АОВ і є кутом обхвату α.

Виділимо на куті а обхвату шківа ниткою нескінченно малий елемент нитки ЕЕ, довжина якого (дуга) буде дорівнювати

$$dl = R \cdot d\theta,$$

де $d\theta$- центральний кут нескінченно малої дуги нитки ЕЕ.

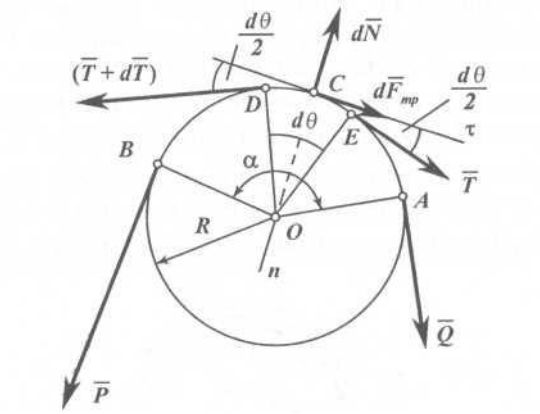


Рис. 1.40.

Розглянемо рівновагу елементу ЕЕ, приклавши до нього такі сили: Т - сила натягу, яка прикладена у точці Е; (Т + (1Т) - сила натягу, яка прикладена у точці £), причому (1Т - різниця натягу, яка обумовлена наявністю сил тертя. Далі поділимо кут (10 навпіл і проведемо крізь точку С (на дузі ЕЕ) осі г і п. Крізь точку С проходить елементарна нормальна сила тиску нитки dN. Оскільки елемент ЕЕ перебуває у рівновазі то різниця натягу сІТ зрівноважується силою тертя шківа по нитці ОЕтр, яка прикладена у точці С, розташована на дотичній г і дорівнює

$$dF_{mp.} = f \cdot dN,$$

де / - коефіцієнт тертя ковзання.

Кути нахилу сил Т та Т +аТ до осі т дорівнюють —.

Складемо рівняння рівноваги елементу ЕЕ під дією прикладених сил, для чого спроектуємо всі сили на осі г і п

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{P}_k\right)_\tau = 0, \quad T\cdot\cos\frac{d\theta}{2} + dF_{mp.} - \left(T + dT\right)\cdot\cos\frac{d\theta}{2} = 0,\\ \sum_{k=1}^{n}\left(\overline{P}_k\right)_n = 0. \quad T\cdot\sin\frac{d\theta}{2} + \left(T + dT\right)\cdot\sin\frac{d\theta}{2} - dN = 0.\end{aligned}\right\}$$

З першого рівняння системи (1.91) знайдемо (1Т, для чого розкриємо дужки

$$T\cdot\cos\frac{d\theta}{2} + dF_{mp.} - T\cdot\cos\frac{d\theta}{2} - dT\cdot\cos\frac{d\theta}{2} = 0.$$

Враховуючи, що $\cos\frac{d\theta}{2} \approx 1$, оскільки кут $d\theta$ дуже малий, скоротивши $T\cdot\cos\frac{d\theta}{2}$, а також на підставі виразу (1.90), з виразу (1.92) маємо

$$dT = f\cdot dN.$$

Перетворимо друге рівняння системи (1.91) до такого вигляду

$$T\sin\frac{d\theta}{2} + T\sin\frac{d\theta}{2} + dT\sin\frac{d\theta}{2} - dN = 0.$$

У виразі (1.94) доданок cIT є величиною вищого порядку ма лизни, як добуток нескінченно малих, тому ним можна знехтувати. Крім . . (10 ао того, при малому куті 8Ш— ~ Т0Д1 будемо мати

$$2T\cdot\frac{d\theta}{2} = dN,$$

або

$$dN = T\cdot d\theta.$$

Підставимо отримане значення (Ш у вираз (1.93):

$$dT = Td\theta\cdot f.$$

Розв’яжемо отримане рівняння (1.97), розділяючи змінні величини

$$\frac{dT}{T} = f\cdot d\theta.$$

Обчислимо визначені інтеграли від лівої та правої частин виразу (1.98). При цьому величина натягу Т змінюється від початкового значення

0 до кінцевого Р, а кут 0 має початкове значення 0 і змінюється до кінцевого значення ос. Таким чином межі інтегрування визначені.

$$\int_{Q}^{P}\frac{dT}{T}=f\int_{0}^{\alpha}d\theta.$$

Розв’язок буде таким

$$ln\ T\Big|_{Q}^{P}=f\theta\Big|_{0}^{\alpha},$$

звідки

$$ln\ P-ln\ Q=f\ \alpha,$$

або

$$ln\frac{P}{Q}=f\alpha,$$

$$\frac{P}{Q}=e^{f\alpha}.$$

Остаточно визначимо з виразу (1.103) силу Р. Вона дорівнює

$$P=Q\cdot e^{f\alpha},\quad Q=Pe^{-f\alpha}.$$

Таким чином, з останнього виразу бачимо, що зусилля Р є більшим від зусилля О в е?а разів, воно залежить від коефіцієнта тертя / та кута обхвату а і не залежить від радіуса шківа Я. Цілком зрозуміло, що дри відсутності тертя (/ = 0) зусилля і Р дорівнюють (2 = Р). Вираз (1.104) носить назву формули Ейлера.

Наведемо приклад розрахунку зусиль у вітках пасової передачі, яка показана на рис. 1.41. Як легко побачити з рисунка, кут обхвату пасом ве¬дучого шківа а-я, коефіцієнт тертя гуми по сталі дорівнює / = 0,23. Тоді

$$e^{f\alpha}=2,7^{0,23\cdot\pi}=2.$$

Отже, маємо

$$P = 2Q.$$

Таким чином, натяг ведучої гилки пасової передачі у двічі більше, ніж веденої.

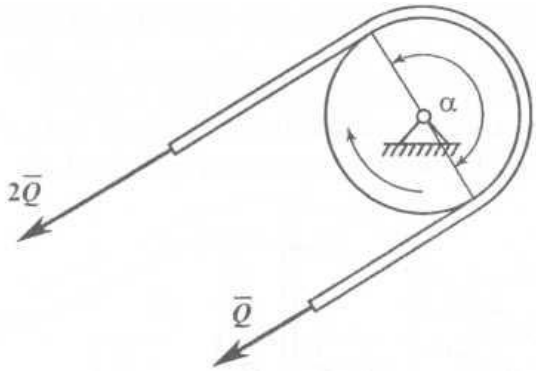


Рис. 1.41.

Питання для самоконтролю

1. Що називають силою тертя, від яких факторів вона залежить, куди вона напрямлена?
2. Що таке коефіцієнт тертя ковзання, кут тертя, конус тертя?
3. Як експериментально визначити коефіцієнт тертя ковзання на похилій площині?
4. Чому дорівнюють максимальна та мінімальна сили тертя при рівновазі тіла на похилій площині?
5. Що таке тертя кочення?
6. Яка величина є коефіцієнтом тертя кочення?
7. Чому дорівнює момент опору при коченні?
8. Яка залежність між силами на кінцях нитки, що треться об циліндричну поверхню (формула Ейлера)?
9. Чому у пасовій передачі ведуча (набігаюча) вітка натягнута удвічі більше, ніж ведена (збігаюча)?
10. Як гасять енергію пароплава в момент причалювання?

Механіка матеріалів і конструкцій

(Частина 2,)

Лекція 1. Основні поняття курсу «Механіка матеріалів і конструкцій»

План

1. Основні положення та гіпотези курсу «Механіка матеріалів і конструкцій
2. Види навантажень. Поняття про розрахункову схему
3. Об'єкти, що вивчаються в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»
4. Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

1. Основні положення та гіпотези курсу «Механіка матеріалів і конструкцій»

Завдання курсу «Механіки матеріалів і конструкцій» і його значення для інженерної освіти. Коротка історична довідка. Основні гіпотези та принципи в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

Дисципліну Механіка матеріалів і конструкцій (ММіК) називають «абеткою» інженера, необхідною для формування інженерної думки майбутнього фахівця технічних спеціальностей.

Під час проектування інженерних об’єктів до них висувається вимога надійності, що передбачає виконання умов міцності, жорсткості та стійкості.

ММіК - це наука про інженерні методи розрахунку деталей машин та елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

Міцність - це здатність конструкції, її частин та деталей витримувати зовнішні навантаження не руйнуючись.

Жорсткість ~ це здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням відносно деформацій.

Стійкість - це здатність конструкцій витримувати зовнішні навантаження, зберігаючи при цьому початкову форму пружної рівноваги.

Завдання інженера: для того, щоб конструкція у цілому відповідала вимогам надійності, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми, і знаючи

властивості матеріалу, з якого вона буде виготовлятися, визначити відповідні розміри залежно від величини і характеру сил, що діють на неї. На перший погляд може здаватися, що для надійності конструкції достатньо збільшити розміри. Дійсно, інколи це призводить до бажаного результату. Але у тих випадках, коли власна вага складає суттєву частину діючих на конструкцію навантажень, збільшення розмірів її елементів, а значить і ваги, не призведе до підвищення міцності. Збільшення розмірів деталей механізмів, які рухаються, призводить до збільшення сил інерції, підвищує навантаження, що є небажаним. З іншого боку, збільшення розмірів конструкції - це збільшення її вартості.

Тому завдання інженерних розрахунків полягає в тому, щоб при менших витратах матеріалу забезпечити більшу надійність конструкції. Взагалі наука базується на теоретично- експериментальних засадах. У теоретичній частині наука базується на теоретичній механіці і математиці, а в експериментальній - на фізиці й матеріалознавстві.

Виникнення науки ММіК пов’язують з ім’ям видатного італійського вченого Галілео Галілея (1564 — 1642), який проводив досліди щодо вивчення міцності, хоча джерела цієї науки ми бачимо вже в твореннях великого Леонардо да Вінчі. У 1678 р. англійський вчений Роберт Гук (1635 - 1703) установив закон деформування пружних тіл, за яким деформація пружного тіла пропорційна діючому на нього зусиллю. Цей закон- є основним у теорії ММіК.

Швидкий розвиток науки механіки твердих тіл почався наприкінці XVIII століття у зв’язку з бурхливим розвитком промисловості й транспорту. Проблемами міцності займалися академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер, видатні вчені М. О. Белелюбський, М. Г Бубнов, А. М. Воропаєв, А. В. Гадолін, Х. С. Головін, Д. І. Журавський, Ф. С. Ясинський та ін. Розвитку ММіК сприяли роботи іноземних вчених Д. Бернуллі, Т. Кармана, А. Кастільяно, О. Коши, Ш. Кулона, Г. Ламе, А. Лява, Д. Максвелла, К. Мора, Л. Нав’є, Л. Прандтля, С. Пуасона та інших. У XX ст. значну роль у розвитку механіки й поширенні наукових знань у галузі ММК відіграли підручники видатних учених В. Л. Кирпичова, С. П. Тимошенка, М. М. Беляєва, О. О. Уманського, В. І.

Феодосьєва, О. А. Ільюшина, І. А. Біргера, Г.С. Писаренка та інших.

2. Види навантажень. Поняття про розрахункову схему

Усі зовнішні навантаження поділяються за:

а) ***характером прикладання***

Зосереджена сила **-** якщо площа її прикладання досить мала і вважають, що вона прикладена в точці (рис. 1.1, а), має розмірність - (Н, кН).

Розподілене навантаження (рівномірно (рис. 1.1, б) та нерівномірно розподілене (рис. 1.1. в), яке може бути розподілене по

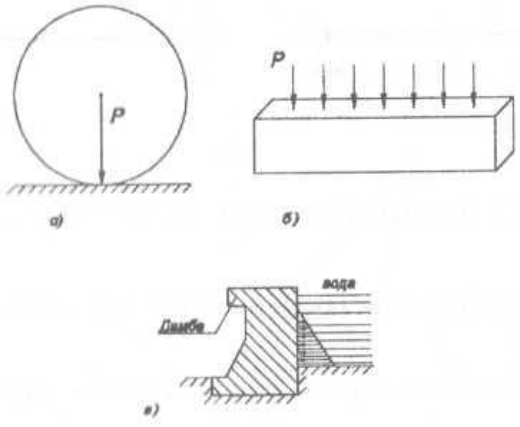


Рис. 1.1. Прикладання навантаження: а зосереджене навантаження; б - рівномірно розподілене навантаження; в нерівномірно розподілене навантаження.

б) ***за характером зміни***

Статичне навантаження — швидкість прикладання незначна і не призводять до появи інших побічних навантажень.

Динамічні навантаження - швидкість прикладання яких значна і вони приводять до появи інерційних сил:

в) ***за тривалістю дії***

Постійної дії (сталі).

Тимчасової дії*, можуть бути тривалої дії і короткотривалі.

Перш ніж почати розрахунок будь-якої конструкції (рис. 1.2, а, б) складають так звану розрахункову схему (рис. 1.3, а, б), де конструкцію відображають у вигляді осьової лінії з ідеалізованими опорами. Складаючи розрахункову схему можливими є відхилення від реальних умов: сила прикладається до осі, а не до верхньої площини балки, тому не враховуємо тертя в опорах.

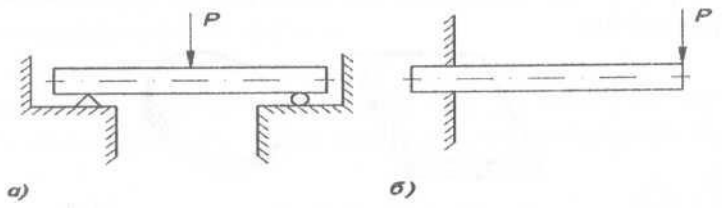


Рис. 1.2. Завантаження конструкцій

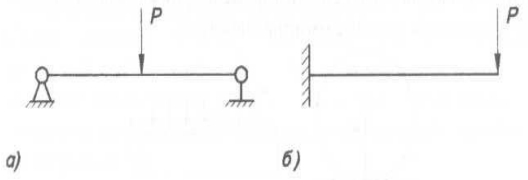


Рис. 1.3. Відповідні розрахункові схеми конструкцій.

3. Об'єкти, що вивчаються в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

Незважаючи на велике розмаїття інженерних рішень, інженерні об’єкти складаються з окремих деталей, вузлів, які мають відповідну (подібну) форму, що можна узагальнити чотирьох видах, які є об’єктами розрахунку ММіК.

До них належать:

а) стрижень (брус) - це геометричне тіло, два розміри якого малі порівняно з третім - довжиною.

Розрізняють такі види стрижнів: прямолінійні, криволінійні, призматичні, постійного і змінного поперечного перерізу (рис. 1.4).

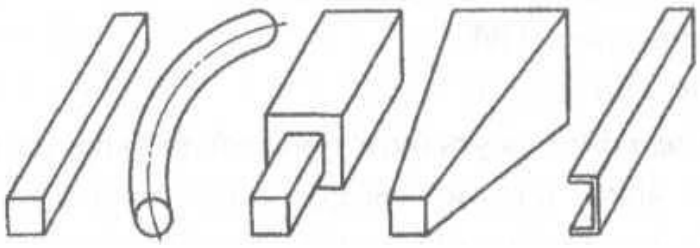


Рис. 1.4. Види стрижнів.

б) пластина - це геометричне тіло, два розміри якого досить великі порівняно із третім - товщиною (рис. 1.5). Пластинами можна вважати плоскі днища й кришки резервуарів, перекриття інженерних споруд та інше.

Рис. 1.5. Види пластин.

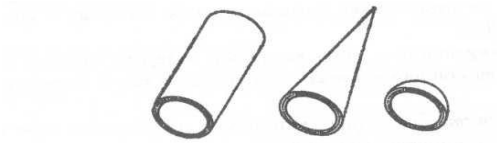


Рис. 1.6. Види оболонок

г) масивне тіло - якщо всі три розміри тіла (об’єкта) одного порядку. До них належать фундаменти споруд, підпірні стіни тощо (рис. 1.7).

в) оболонка - це тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій поверхні одна від одної. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки циліндричні, конічні, сферичні та ін. До оболонок належать неплоскі стінки резервуарів, котлів, куполи будинків, обшивки фюзеляжу літаків та інше (рис. 1.6).

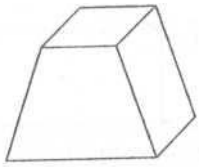


Рис. 1.7. Масивне тіло

Основні властивості твердого деформованого тіла

Під дією зовнішнього навантаження в результаті зміни взаємного розташування внутрішніх частин тіла, відбувається зміна форми, розмірів і об’єму деталі, тобто відбувається його *деформація.* Але маса тіла при цьому не змінюється.

Таким чином, під деформацією розуміють зміну взаємного розташування внутрішніх частин, що призводить, як правило, до зміни його розмірів, форми та об’єму.

Основними властивостями твердого деформованого тіла є:

Пружність - здатність матеріалу деформуватись під дією зовнішнього навантаження і поновлювати свою форму і розміри після його зняття.

Пластичність - здатність тіла деформуватися і залишатися в деформованому стані після зняття навантаження.

Крихкість - здатність матеріалу до руйнування при малих деформаціях (прикладом такого матеріалу є скло).

Однорідність - якщо механічні властивості матеріалу однакові у всіх його точках.

Ізотропність ~ якщо властивості матеріалу не залежать від напрямку дії навантаження (прикладом такого матеріалу є сталь, чавун, крейда).

Анізотропність - якщо властивості матеріалу залежать від напрямку дії стислого навантаження (прикладом такого матеріалу є дерево).

Повзучість — це здатність матеріалу до деформування за умови тривалої дії навантаження (рис. 1.8).

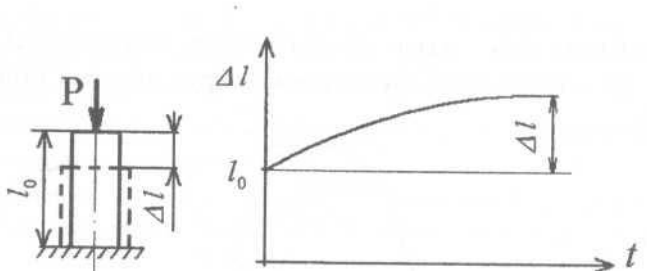


Рис. 1.8. Графічне зображення повзучості.

Релаксація напружень - це зменшення напружень у матеріалі з часом за умови обмеження деформації (рис. 1.9).

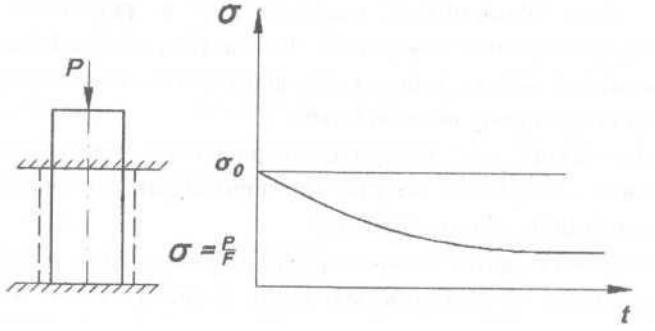


Рис. 1.9. Графічне зображення релаксації.

4. *Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»*

Для спрощення методики розрахунків приймають низку гіпотез і принципів щодо властивостей матеріалів і характеру деформування, які в кінцевому результаті не призводять до значних похибок.

Існує низка гіпотез:

1. Гіпотеза про однорідність матеріалу вважає, що у всіх точках тіла властивості однакові.
2. Гіпотеза про ізотропність матеріалу вважає, що для деяких матеріалів їх властивості не залежать від напрямку дії сили.
3. Гіпотеза про абсолютну пружність матеріалу вважає, що після зняття навантаження деталь повністю відновлює свою форму.
4. Гіпотеза про суцільність матеріалу вважає, що матеріал повністю заповнює форму без пустот та тріщин.
5. Гіпотеза про незначність деформацій щодо до розмірів тіла вважає, що деякі деформації надто малі, щодо розмірів тіла значить ними можна нехтувати. Ця гіпотеза дає можливість застосування умов рівноваги для деформованих систем (рис. 1.10.).

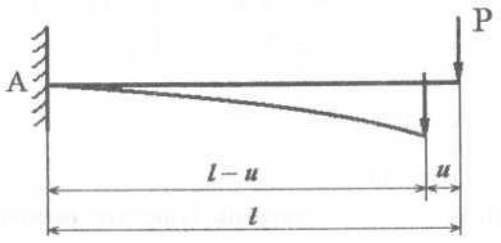


Рис. 1.10. Графічне зображення гіпотези незначності деформацій.

Згинальний момент в точці А:

$$M_A = P(l-u);$$

в якому два невідомих *(M_A і u*). Прийнявши u = О , отримаємо

$$M_A = Pl.$$

6. Гіпотеза про лінійну залежність між деформацією і

зусиллям (закон Гука): $\Delta l = kP$.

7. Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції;, З яким величина будь-якого зусилля чи деформації від дії кількох

зовнішніх сил може бути знайдена як алгебраїчна сума цих величин від дії кожної сили окремо (рис. 1.11).

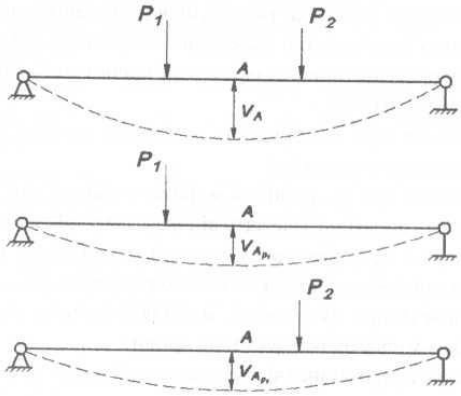


Рис. 1.11. Графічне зображення принципу суперпозиції.

Тобто прогин в точці ***A*** від дії двох сил ***P1*** і ***P2*** знайдемо:

$$V_A = V_{AP_1} + V_{AP_2}.$$

V_{AP_1} – прогин від сили P_1

V_{AP_2} – прогин від сили P_2

Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі), згідно з якою поперечний переріз, плоский і нормальний до осі перед деформацією і залишається таким же і після деформації (рис. 1.12).

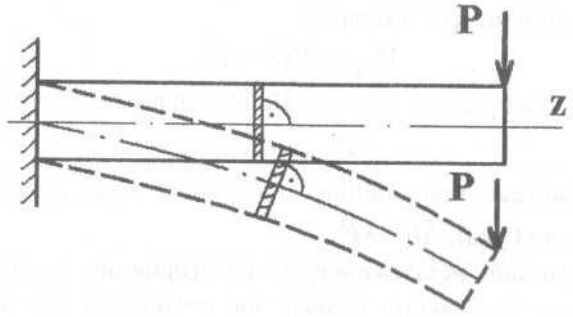


Рис. 1.12. Графічне зображення гіпотези плоских перерізів.

Лекція 2 Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення. Метод перерізів

План

1. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення
2. Види простих деформацій стрижня
3. Поняття про напруження та деформацію в точці

1. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення.

У результаті дії зовнішнього навантаження в будь-якому перерізі деталі виникають внутрішні зусилля, які є результатом взаємодії внутрішньої частини тіла і забезпечують його цілісність і сумісність деформації. Для визначення внутрішніх зусиль застосовують метод перерізів, згідно з яким розтинають стрижень перерізом нормальним до осі на дві частини (рис. 1.13), відкидаючи одну із них, і розглядають рівновагу залишеної частини стрижня.

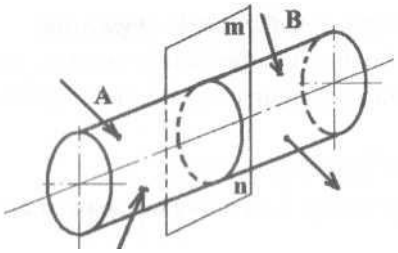


Рис. 1.13. Загальний випадок дії на тіло сил.

Дію відкинутої частини тіла на залишену заміняють внутрішніми зусиллями (рис. 1.14), величину і напрям яких визначають за допомогою рівнянь статики, використовуючи гіпотезу про малість деформації. Внутрішні зусилля узагальнюються до двох силових факторів: ***K*** - головний вектор; ***M*** - головний момент. Спроектувавши головний вектор і головний момент на координатній осі отримаємо ***шість внутрішніх зусиль.***

прогин від дії сили

N_z поздовжня сила;

Q_x, Q_y - поперечні сили;

M_x, M_y - згинальні моменти;

M_z - крутний момент.

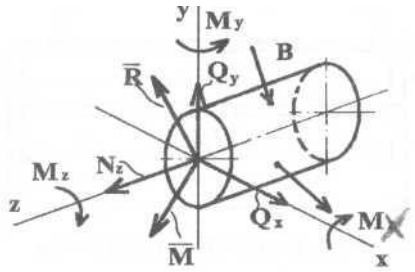


Рис. 1.14. Рівновага залишеної частини стрижня.

Внутрішні зусилля знаходять із рівнянь рівноваги:

$$\Sigma X = 0, \Rightarrow Q_x;$$
$$\Sigma Y = 0, \Rightarrow Q_y;$$
$$\Sigma Z = 0, \Rightarrow N_z;$$
$$\Sigma M_x = 0, \Rightarrow M_x;$$
$$\Sigma M_y = 0, \Rightarrow M_y;$$
$$\Sigma M_z = 0, \Rightarrow M_z.$$

Тобто із шести рівнянь статики знаходимо шість внутрішніх зусиль.

2. Види простих деформацій стрижня

У разі, коли із шести внутрішніх зусиль не дорівнює нулю тільки одне, стрижень знаходиться в умовах простої деформації, до якої належать:

а) Центральний розтяг (рис. 1.15.).

У поперечному перерізі діє лише поздовжня сила (N_2= 0).

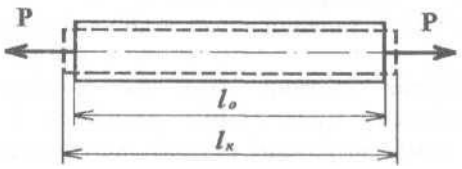


Рис. 1.15. Центральний розтяг.

Деформація характеризується:

$\Delta l = l_к - l_o$ - абсолютне подовження при розтягу

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ - відносне подовження при розтягу.

б) Центральний стиск (рис. 1.16.).

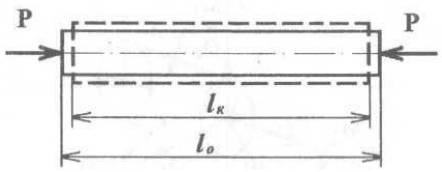


Рис. 1.16. Центральний стиск.

Деформація характеризується:

$\Delta l = l_к - l_o$ - абсолютне укорочення при стиску;

$\varepsilon = -\frac{\Delta l}{l_0}$ -

- відносне укорочення при стиску.

в) Зріз і зсув (рис. 1.17.-1.18.).

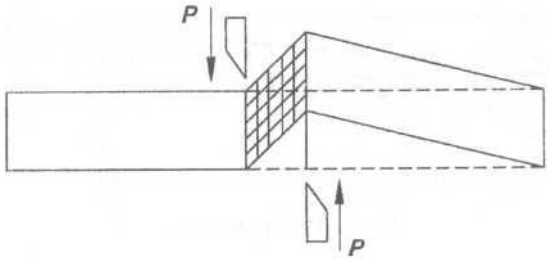


Рис. 1.17. Зріз (зсув).

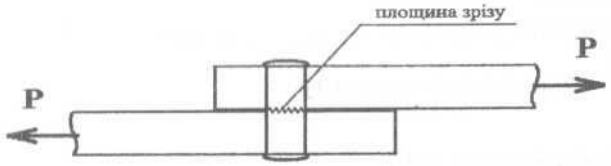


Рис. 1.18. Зріз заклепкового з'єднання.

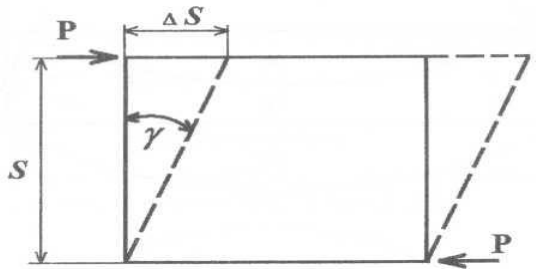


Рис. 1.18. Деформації зсуву.

При зсуві присутні такі деформаційні характеристики (рис. 1.18):

ΔS - - абсолютний зсув;

$\frac{\Delta S}{S} = tg\gamma \approx \gamma$ - відносний зсув (кут зсуву)

г) Кручення (рис. 1.19).

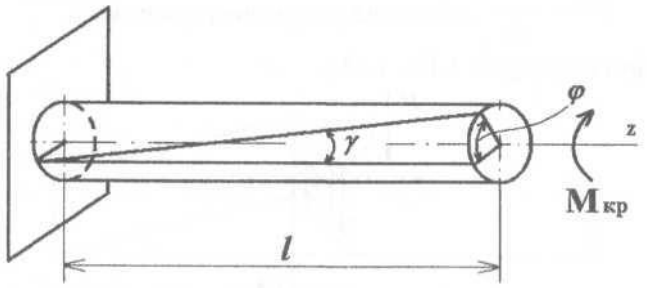


Рис. 1.19. Кручення.

Основні деформаційні характеристики при крученні:

$\theta = \frac{\varphi}{l}$ - відносний кут повороту.

φ - кут повороту перерізу;

γ - кут зсуву;

д) Чистий згин (рис. 1.20).

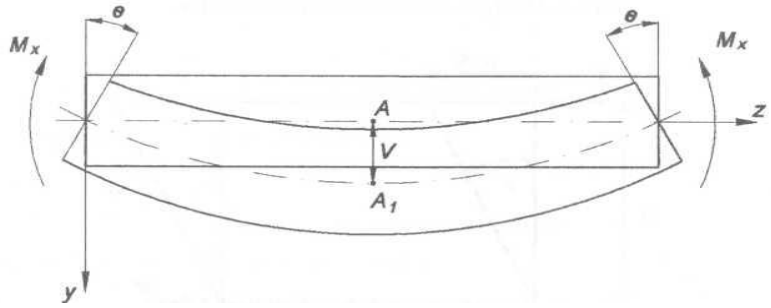


Рис. 1.20. Чистий згин.

При чистому згині у поперечному перерізі виникають деформації, викликані згинальними моментами $M_x \neq 0.$

Основні характеристики при деформаціях чистого згину:

$\theta_{(z)}$ - кут повороту перерізу.

$V_{(z)}$ -прогин;

3. Поняття про напруження та деформацію в точці

На підставі гіпотези про суцільність матеріалу можна припустити, що внутрішні зусилля розподіленні по всьому поперечному перерізу. Виділимо точку К з елементарною площиною А Р і прикладемо в цій точці рівнодіючу внутрішніх зусиль А В (рис. 1.21).

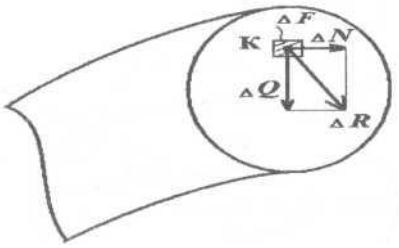


Рис. 1.21. Рівновага внутрішніх зусиль.

$\frac{\Delta R}{\Delta F} = P_{cp}$ - середнє напруження на площадці АР.

$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = P$ - напруження в точці К.

Напруження - це міра інтенсивності внутрішнього зусилля (яка величина внутрішньої сили припадає на одиницю площі), (вимірюється в Н/м^2 чи Па (МПа), або за старою системою вимірів кгс/см^2).

Розкладено АВ на складові: нормальну і дотичну.

Отримаємо:

__ $\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = \sigma$ - нормальне напруження;

$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \tau$ - дотичне напруження.

Оскільки $\boldsymbol{\tau}$ може мати довільний напрямок, то спроектувавши його на координатні осі, отримаємо $\boldsymbol{\tau_x}$, ^ $\boldsymbol{\tau_Y}$, (рис. 1.22).

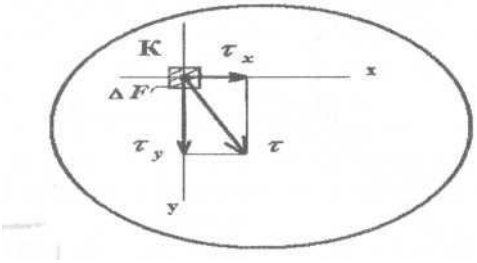


Рис. 1.22. Дотичні напруження.

У результаті прикладання до тіла зовнішнього зусилля та його деформування точка К переміститься в положення $К_ь$ а відрізок S змінить свій напрямок і величину на ΔS (рис. 1.23).

$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta S}{S} = \varepsilon$ – відносна лінійна деформація в точці К за S.

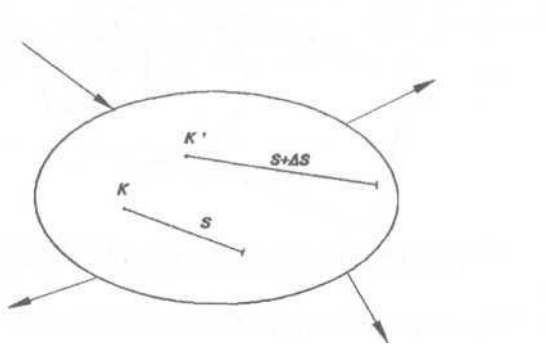


Рис. 1.23. Прикладання до тіла зовнішнього навантаження та його деформування.

Провівши в точці К уявно осі і спроектувавши ε на них, отримаємо три складові лінійної деформації (рис. 1.24).

Якщо уявно в точку К провести координатні осі, то в результаті деформації тіла, прямі кути між осями змінюються.

Таким чином, мають місце і кутові деформації (рис. 1.25), яких всього три.

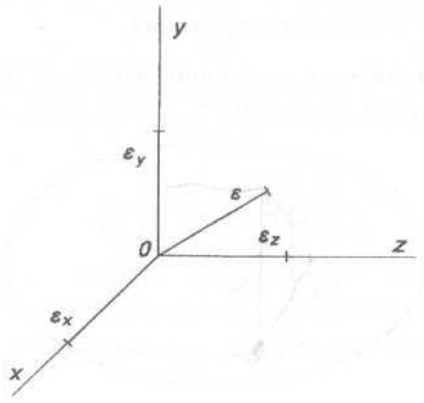


Рис. 1.24. Складові лінійної деформації.

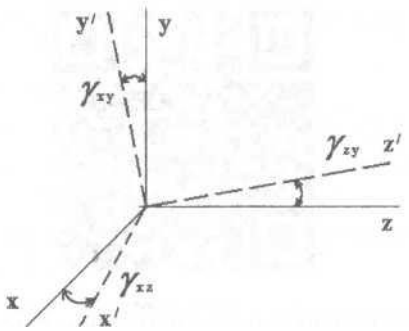


Рис. 1.25. Кутові деформації.

При цьому тензор деформації у математичному виразі для точки має вигляд:

$$T_D = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Це свідчить про те, що всього в точці може виникати три лінійні і три кутові деформації.

Лекція 3. Геометричні характеристики плоских перерізів

План

1. Поняття геометричних характеристик плоских перерізів
2. Моменти інерції відносно паралельних осей

1. *Поняття геометричних характеристик плоских перерізів. Загальні поняття*

На відміну від центрального розтягу-стиску, площа поперечного перерізу не може характеризувати опір стрижня при згині або крученні. Тому вводять інші характеристики, що називаються геометричними характеристиками плоских перерізів (ГХПП).

До них належать:

а) Статичний момент площі (рис. 2.1)

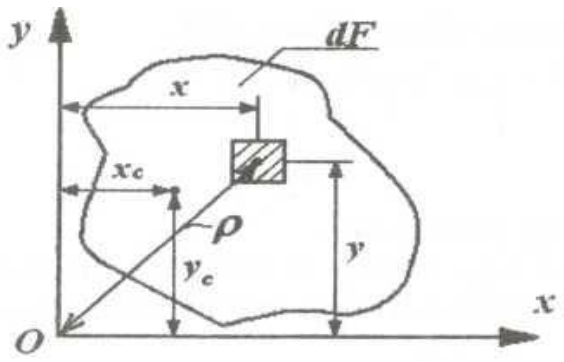


Рис. 2.1. Поняття про геометричні характеристики плоских перерізів.

який визначається за формулою 2.1:

$$S_x = \int_F y \cdot dF \; ; \quad S_y = \int_F x \cdot dF \; .$$

Із курсу теоретичної механіки відомо, що координати центра ваги можна визначити за формулами 2.2, що виходять з виразу 2.1:

$$X_C = \frac{S_y}{F}; \qquad y_C = \frac{S_x}{F};$$

Звідси маємо:

$$S_x = y_c \cdot F; \qquad S_y = x_c \cdot F.$$

Одиниці виміру (довжина) .

б) Осьові моменти інерції (рис. 2.1), визначають за формулою:

$$I_y = \int_F x^2 \cdot dF \; . \qquad I_x = \int_F y^2 \cdot dF \; ;$$

$$I_x > 0 \; .$$

Довжина виміру довжина

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} \; .$$

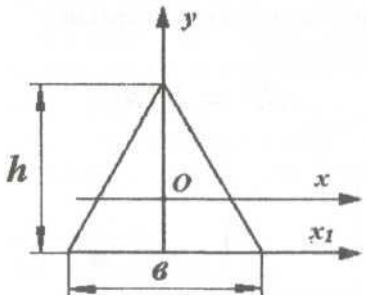


Рис. 2.4. Поперечний переріз трикутної форми

Круг (рис. 2.5):

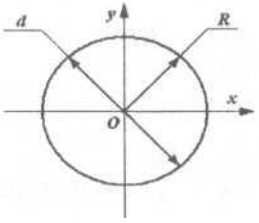


Рис. 2.5. Поперечний переріз форми круга

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{R} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Кільце (рис. 2.6):

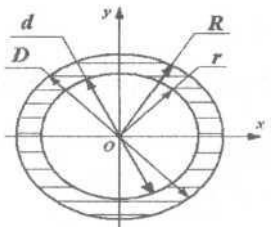


Рис. 2.6. Поперечний переріз форми кільця

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha)^4 = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4),$$

де $\alpha = \frac{D}{d}$.

$$I_\rho = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4).$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4).$$

2. *Моменти інерції відносно паралельних осей*

Припустимо, що нам відома площа поперечного перерізу та значення осьових моментів інерції відносно осей x і y. Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно осей, паралельних заданим (рис. 2.7).

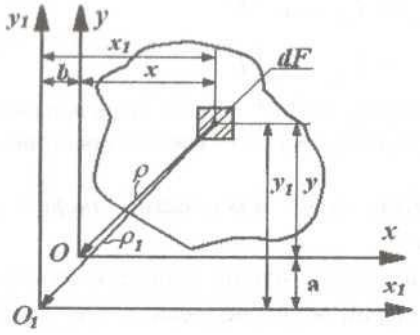


Рис. 2.7. Залежність між осьовими моментами інерції відносно паралельних осей.

$$y_1 = y + a\ ,\ x_1 = x + b\ .$$

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \int_F (y+a)^2 dF = \int_F y^2 \cdot dF + 2a\int_F y \cdot dF + a^2 \int_F dF \quad (2.24)$$

Отримаємо вираз 2.25

$$I_{x_1} = I_x + 2aS_x + a^2 F$$

відповідно

$$: I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2 F;$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x+b)(y+a)dF = \ldots = I_{xy} + aS_y + bS_x + ab \quad (2.26)$$

Припустимо, що осі x і y — центральні, тоді $S_x = 0,\ S_y = 0.$

Відповідно до цього вирази (2.25) і (2.26) матимуть вигляд

$$I_{x_1} = I_x + a^2 F$$
$$I_{y_1} = I_y + b^2 F$$
$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abF$$

Склавши два перших рядки виразу (2.27), отримаємо:

$$I_{X_1} + I_{Y_1} = I_X + I_Y + (a^2 + b^2)F\ ;$$

або ж, враховуючи (2.6) отримуємо:

$$I_{\rho_1} = I_\rho + (a^2 + b^2)F$$

Якщо припустити, що відомі осьові моменти інерції відносно довільних осей, то можемо знайти їх значення відносно центральних осей паралельних даним.

$$I_x = I_{x_1} - a^2 F$$
$$I_y = I_{y_1} - b^2 F.$$

Як видно із виразу (2.30): із всіх паралельних осей, момент інерції буде найменшим відносно центральної осі (рис. 2.8).

Лекція 4. Геометричні характеристики плоских перерізів

План

3. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей
4. Головні осі та головні моменти інерції
5. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості

1. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Припустимо, що відома площа поперечного перерізу, значення осьового моменту інерції відносно осей x і ***y.*** Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно осей ***и*** та У (рис. 2.10), повернутих на кут ***a.***

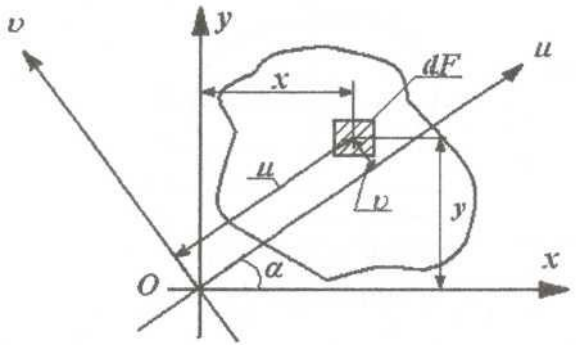


Рис. 2.8. Поворот координатних осей на кут ***a.***

Із рис. 2.8 видно, що:

$$v = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha$$
$$u = y \cdot \sin\alpha + x \cdot \cos\alpha$$

Звідки матимемо:

$$I_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha)^2 dF =$$
$$= \cos^2\alpha \cdot \underbrace{\int_F y^2 dF}_{I_x} + \sin^2\alpha \cdot \underbrace{\int_F x^2 dF}_{I_y} - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \underbrace{\int_F xy dF}_{I_{xy}}.$$

За аналогією знайдемо

Враховуючи що $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, маємо маємо

$$I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$
$$I_v = I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha.$$

Знайдемо відцентровий момент інерції:

$$I_{uv} = \int_F vudF = \int_F (y\cos\alpha - x\sin\alpha)\cdot(y\sin\alpha + x\cos\alpha)dF = \ldots$$
$$\ldots = -\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha$$

Склавши два рядки виразу (2.33), отримаємо, що

$$I_u = I_v = I_x + I_y = const.$$

Вираз (2.35) це - властивість інваріантності осьових моментів інерції.

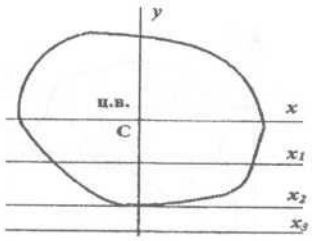


Рис. 2.9. Порівняльні осі.

$$I_x = \min < I_{x1} < I_{x2} < I_{x3}.$$

2. Головні осі та головні моменти інерції

Із виразу (2.33) очевидно, що осьові моменти інерції змінюються відносно кута «, тобто є функцією кута ***a.***

Очевидно, що існує таке значення кута ***a₀,*** при якому згідно з виразом (2.35) моменти інерції набувають екстремальних значень (максимального та мінімального). При цьому візьмемо похідну виразу (2.33) і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dI_u}{d\alpha_0} = -2I_x\cos\alpha_0\sin\alpha_0 + 2I_y\sin\alpha_0\cos\alpha_0 - 2I_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0$$

Враховуючи, що $\sin\alpha_0\cdot\cos\alpha_0=\frac{1}{2}\sin 2\alpha_0$

$$I_x \sin 2\alpha_0 - I_y \sin 2\alpha_0 + 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

або

$$(I_x - I_y)\sin 2\alpha_0 + 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0.$$

Поділимо вираз 3.37 на $\cos 2\alpha_0$, отримаємо:

$$(I_x - I_y)tg2\alpha_0 + 2I_{xy} = 0.$$

Звідси кут, що визначається положенням головних осей .

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Існує дві перпендикулярні осі, відносно яких осьові моменти інерції набувають екстремального значення. Ці осі називаються головними, а моменти інерції відносно них — головними моментами інерції перерізу.

Значення головних осьових моментів інерції визначається: ,

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}.$$

Формула для визначення положення осей ***max*** та ***min:***

$$tg2\alpha_1 = -\frac{2I_{xy}}{I_y - I_{\max}}; \qquad tg2\alpha_2 = -\frac{2I_{xy}}{I_y - I_{\min}}.$$

3. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості

Введемо нову геометричну характеристику - ***радіус інерції,*** а також припустимо, що осі ***x*** і ***y*** — головні осі. Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно вісі ***u,*** повернутої на кут а, що відносно осі ***x*** (рис. 2.10).

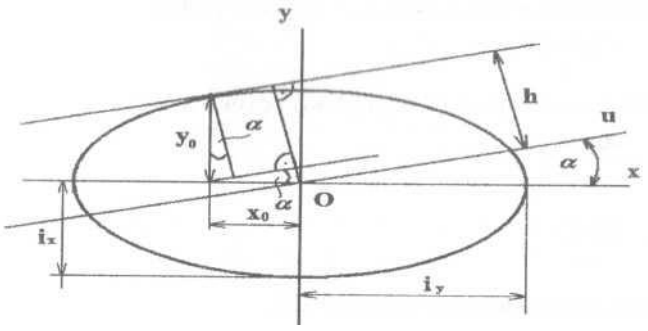


Рис. 2.10. Еліпс інерції.

Введемо нову величину - радіус інерції фігури відносно якої- небудь осі. Радіусом інерції відносно, наприклад, осі ***x*** називається величина

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}},$$

де I_x - момент інерції відносно осі x, а P - площа фігури. Звідси:

$$I_x = i_x^2 \cdot F.$$

Момент інерції I_u відносно осі ***u*** визначається за формулою (2.33). Але вісь ***ox*** є головною віссю, та відцентовий момент I_{xy}.

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha$$

Розділимо вираз (2.43) на P, отримаємо:

Побудуємо еліпс, напіввісі якого є радіусами інерції (рис. 2.10).

Рівняння еліпса $\frac{y^2}{i_x^2} + \frac{x^2}{i_y^2} = 1$

Проведемо дотичну до еліпса, паралельну осі ***u.*** і знайдемо відстань від центру еліпса до цієї дотичної.

Рівняння дотичної до еліпса:

$$\frac{yy_0}{i_x^2} + \frac{xx_0}{i_y^2} = 1$$

Відстань Л знайдемо за формулою:

$$h = y_0\cos\alpha + x_0\sin\alpha;$$

Розділимо на ***к*** обидві частини рівності (2.47):

$$\frac{y_0\cos\alpha}{h} + \frac{x_0\sin\alpha}{h} = 1$$

Прирівняємо вирази (2.46) і (2.48) і отримаємо:

$$\frac{y}{i_x^2} = \frac{\cos\alpha}{h};$$

$$\frac{x}{i_y^2} = \frac{\sin\alpha}{h}$$

Піднесемо до квадрату вираз (2.49):

$$\frac{y^2}{i_x^2} = \frac{i_x^2\cos^2\alpha}{h^2}; \quad \frac{x^2}{i_y^2} = \frac{i_y^2\sin^2\alpha}{h^2}$$

Підставивши вираз (2.50) в вираз (2.45), отримаємо:

$$\frac{i_x^2 \cos^2 \alpha}{h^2} + \frac{i_y^2 \sin^2 \alpha}{h^2} = 1.$$

Перетворивши вираз (3.51):

$$i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha = h^2$$

Порівнявши (2.52) і (2.44), можемо отримати такі рівності:

$$i_u = h \; ; \quad I_u = h^2 F .$$

Це дає нам можливість графічним шляхом знаходити значення осьових моментів інерції відносно будь-якої осі, паралельної головній осі.

Лекція 5. Центральний розтяг і стиск стрижнів

План

1. Теоретичні положення центрального розтягу-стиску стрижнів
2. **.** Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука при розтязі-стиску
3. Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень
4. Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня

1. Теоретичні положення центрального розтягу-стиску стрижнів

Поздовжні сили та їх епюри. Диференціальні залежності між навантаженням та поздовжньою силою

В інженерній практиці досить часто зустрічається такий вид деформацій стрижня, як розтяг або стиск. Найбільш простий випадок центральний розтяг-стиск, коли в поперечному перерізі із шести внутрішніх зусиль лише поздовжня сила не дорівнює нулю. Воно виникає тоді, коли точка прикладання зовнішньої сили або рівнодіючої збігається з центром ваги перерізу і лінія її дії збігається з віссю. Для визначення поздовжньої сили $И_2$ використовують метод перерізів (рис. 3.1).

Правило знаків:

$И_г>0$ - коли вона напрямлена від перерізу, і викликає розтяг стрижня, і навпаки - «від'ємна», викликаючи стиск.

Для наочного представлення характеру зміни $1У_г$ по довжині стрижня

будують епюру 7¥г - графік, кожна ордината якого показує значення в поперечному перерізі (графічний закон зміни 7¥г).

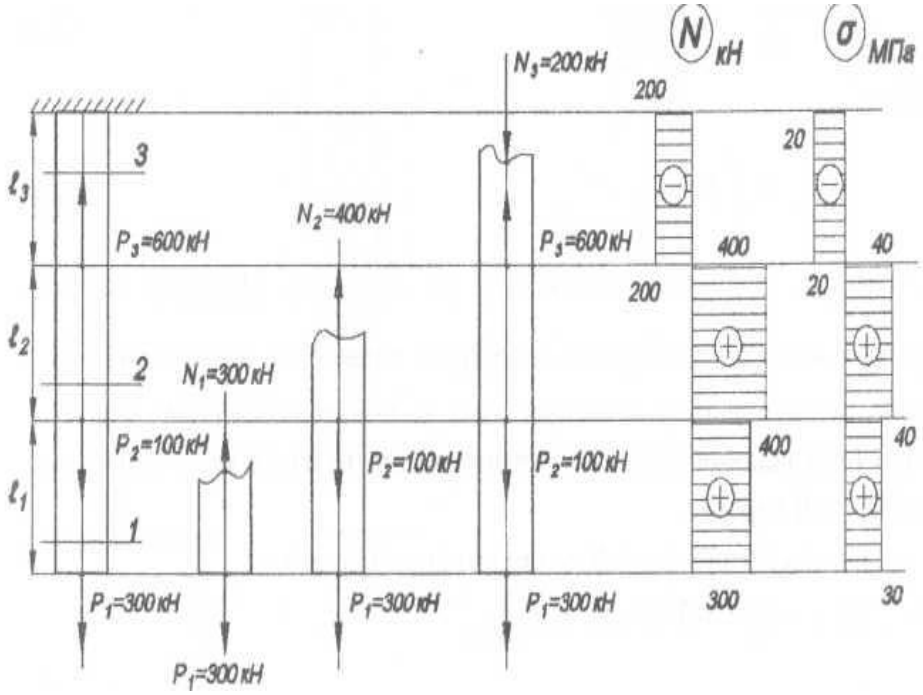


Рис. 3.1. Метод перерізів при розтязі-стиску.

У тому разі, коли характер зміни зовнішнього навантаження по довжині стрижня досить складний, вказаний метод унеможливлює швидке розв'язання задачі.

Розглянемо ділянку стрижня довжиною (рис. 3.2).

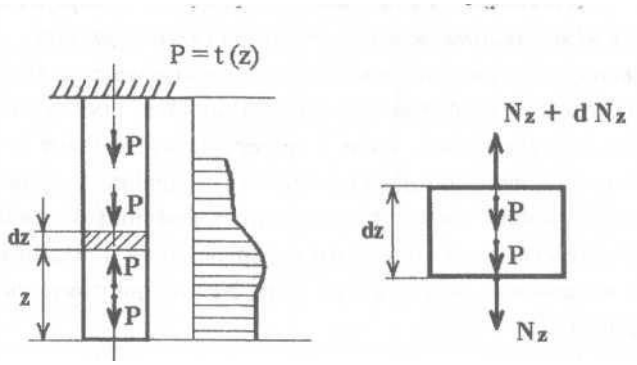


Рис. 3.2. Диференціальна залежність між зовнішнім навантаженням і поздовжньою силою.

$$\sum z = 0,$$

$$N_z + dN_z - N_z - P \cdot dz = 0,$$

$$P = \frac{dN_z}{dz},$$

Звідси:

$$N_z = \int_0^l P \cdot dz$$

Вираз (3.2) дає можливість не будувати відсічені частини стрижня, а одразу записувати аналітичні вирази для визначення в характерних перерізах, межами яких є: початок та кінець стрижня; точки прикладання зовнішніх навантажень; точки, в яких змінюється поперечний переріз.

Запишемо значення М в характерних перерізах:

$$N_{1-1} = P_1 = -300\ кН = N_{2-2},$$

$$N_{3-3} = P_1 + P_2 = 400\ кН = N_{4-4},$$

$$N_{5-5} = P_1 + P_2 - P_3 = -200 кН = N_{6-6}.$$

2. Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука при розтязі-стиску

Завантажимо призматичний стрижень рівномірно-розподіленим навантаженням на кінцях (рис. 3.3).

Із умов рівноваги маємо:

$$N_z = P$$

Зрозуміло, що в перерізі т-п:

$$N_z = \int_F \sigma \cdot dF$$

Із виразу (3.3) неможливо знайти характер зміни за поперечним перерізом. Тому розглядають характер деформації стрижня, наносячи на бокові поверхні сітку (рис. 3.3). Після завантаження стрижня отримуємо, що поперечні риски не викривлені і однаково віддалені одна від одної. Це дає можливість стверджувати, що як зовнішні, так і внутрішні волокна подовжуються однаково, тобто справедливою є гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі).

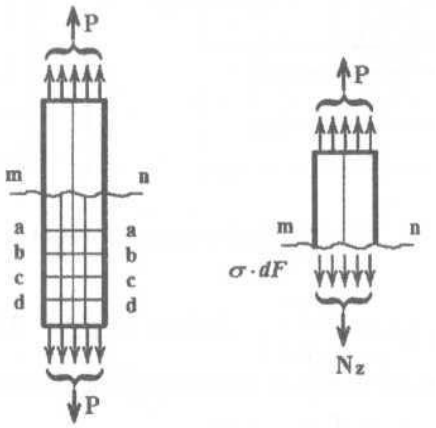


Рис. 3.3. До гіпотези плоских перерізів.

$$\varepsilon = const\ ,\quad \sigma = const\ ,$$
$$N_z = \sigma\int_F dF = \sigma\cdot\int dF = \sigma\cdot F\ ,$$

Звідки:

$$\sigma = \frac{N_z}{F}$$

Тобто напруження СГ ПО поперечному перерізу розподіляється рівномірно.

Для розв'язання задач міцності будують епюру O''. При цьому в характерних перерізах визначають її величину.

Для прикладу побудуємо епюру 6Т при $P = 10$ см^2 (рис. 3.1)

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = \frac{N_{1-1}}{F} = \frac{300\cdot 10^3}{10\cdot 10^{-4}} = 300 МПа\ ,$$
$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = \frac{N_{3-3}}{F} = \frac{400\cdot 10^3}{10\cdot 10^{-4}} = 400\ МПа\ ,$$
$$\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = \frac{N_{5-5}}{F} = -\frac{200\cdot 10^3}{10\cdot 10^{-4}} = -200\ МПа\ .$$

Розглянемо деформацію стрижня (рис. 3.4):

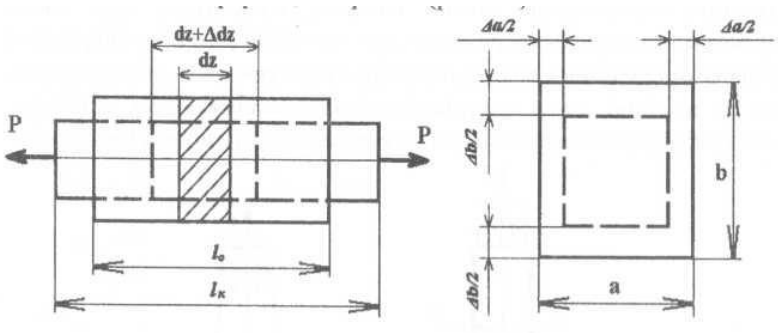


Рис. 3.4. Деформація стрижня.

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}; \quad \Delta dz = \varepsilon \cdot dz; \quad \Delta l = l_к - l_0.$$

Враховуючи гіпотезу плоских перерізів, маємо:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon \cdot dz = \varepsilon \int_l dz = \varepsilon \cdot l.$$

Тобто відносне подовження стрижня (деформація) визначається

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

При цьому поперечна деформація:

$$\varepsilon'_a = -\frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon'_b = -\frac{\Delta b}{b}, \quad \varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon'.$$

Експериментально встановлено, що відношення відносних поперечних деформацій до поздовжніх (в межах пружних деформацій) є величиною сталою і називається її коефіцієнтом Пуассона (коефіцієнт поперечної деформації):

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|.$$

Закон Гука

Відомо з курсу фізики, що:

$$\Delta l = k \cdot P.$$

Зробимо деякі перетворення виразу 3.10:

$$\frac{\Delta l \cdot l}{l \cdot F} = \frac{k \cdot P}{F},$$

Маючи такі рівності:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon; \quad \frac{P}{F} = \sigma.$$

Підставимо рівності 3.12 у вираз 3.11, отримаємо:

$$\frac{\varepsilon \cdot l}{F} = k \cdot \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{l}{k \cdot F} \cdot \varepsilon.$$

Позначимо $\frac{l}{kF} = E$ – модуль пружності першого роду (або модуль Юнга) при розтязі,

Тоді закон Гука при розтязі-стиску має вигляд:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Із виразом 3.14 зробимо перетворення

$$\frac{N}{F} = \frac{E \cdot \Delta l}{l}, \text{ тоді } \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F},$$

де добуток: $E \cdot F$ – жорсткість при розтязі-стиску

3. Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень

Для стрижня з постійними (сталими) *N* і *P* загальна деформація визначається виразом (3.15).

Для стрижня ступенево-змінного поперечного перерізу загальна деформація визначається як сума деформацій ділянок стрижня із сталими *N* і *P*. тобто:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot F_i}.$$

Приклад: Для стрижня (рис. 3.5) визначити його деформацію і побудувати епюру абсолютного подовження

($E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*).

Дано:

$P_1 = 2$ кН; $P_2 = 5$ кН; $P_1 = 7$ кН;
$F_1 = 10$ см^2; $F_2 = 20$ см^2;
$l_1 = 0{,}5$ м; $l_2 = 0{,}8$ м; $l_3 = 0{,}4$ м; $l_4 = 0{,}6$ м.

Розв’язок:

$$N_{1-1} = N_{2-2} = P_1 = 2 \ кН;$$
$$N_{3-3} = N_{4-4} = N_{5-5} = N_{6-6} = P_1 - P_2 = 2 - 5 = -3 \ кН;$$
$$N_{7-7} = N_{8-8} = P_1 - P_2 + P_3 = 4 \ кН.$$

Абсолютні деформації ділянок стрижня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{1-1} \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}001} = 5 \cdot 10^{-6} \ м;$$

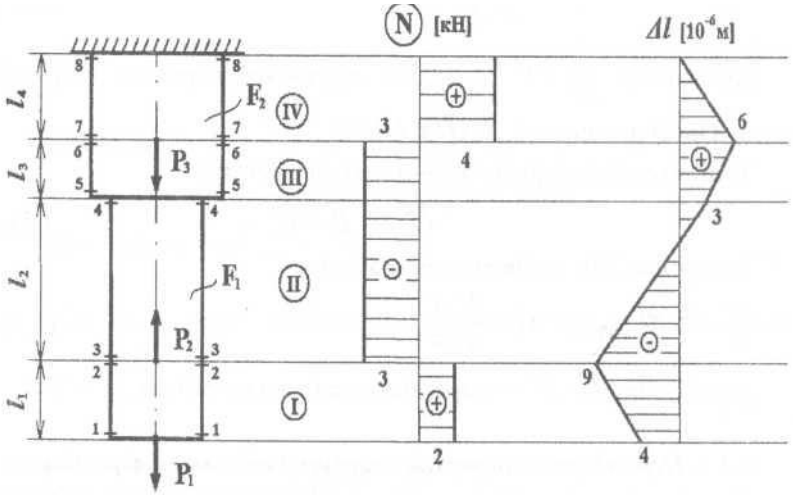


Рис. 3.5. Рисунок до задачі.

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{3-3} \cdot l_2}{E \cdot F_1} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}001} = -12 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{5-5} \cdot l_3}{E \cdot F_2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}002} = -3 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta l_{IV} = \frac{N_{7-7} \cdot l_4}{E \cdot F_2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}002} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} = (5 - 12 - 3 + 6) \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-4} \text{ см}$$

Побудуємо епюру *ΔL*. яка будується від затиснення стрижня

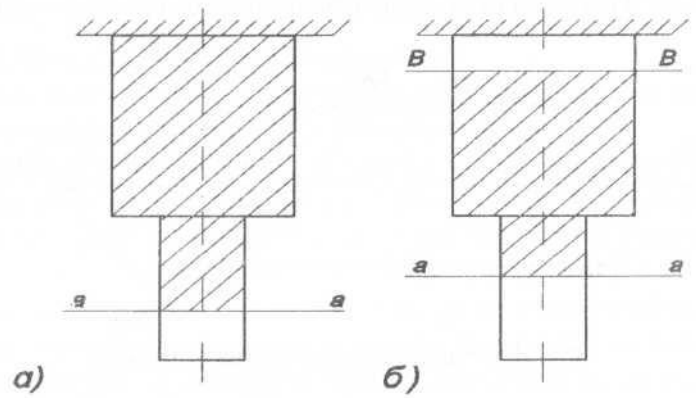


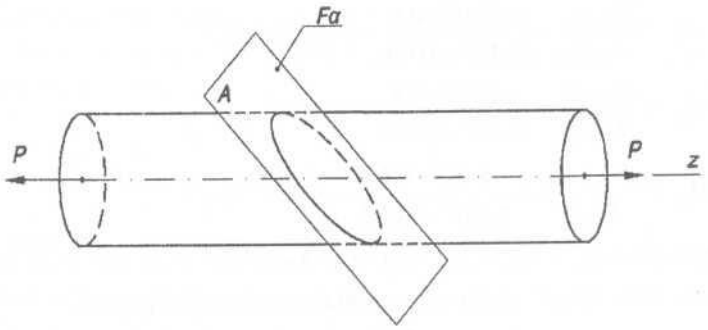
Рис. 3.6. Визначення переміщень:

а) - переріз *а~а* відносно затиснення; б) - двох суміжних перерізів.

Часто виникає необхідність визначити переміщення між перерізом і защемленням або між перерізами *а-а* і *в-в.* У цих випадках переміщення дорівнює абсолютній деформації (заштрихованих частин нарис. 3.6).

4. Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня

Розітнемо стрижень площиною А (рис. 3.7), нахиленою до поперечного перерізу під кутом *OC* і розглянемо рівновагу лівої частини стрижня, знайшовши



напруження в нахиленому перерізі

Рис. 3.7. Розтин стрижня площиною нахиленою під кутом а до осі 2

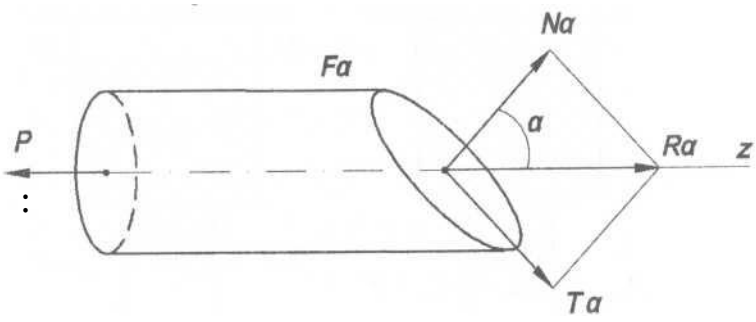


Рис. 3.8. Рівновага лівої частини стрижня

Відомо, що

$$: F_\alpha = \frac{F_0}{\cos\alpha}, \quad R_\alpha = P$$

Розкладемо на складові, враховуючи (3.17)

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= R_\alpha \cos\alpha = P\cos\alpha \\ T_\alpha &= R_\alpha \sin\alpha = P\sin\alpha \end{aligned}\right\}$$

При цьому виникають напруження:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{F_\alpha} = \frac{P\cos\alpha}{F_0/\cos\alpha} = \sigma_0 \cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{F_\alpha} = \frac{P\sin\alpha}{F_0/\cos\alpha} = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\alpha$$

де: $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$ – максимальне напруження в поперечному перерізі (3.21).

Зробимо аналіз (3.19) і (3.20) залежно від кута нахилу перерізу:

1) $\alpha = 0$: $\sigma_{\alpha=0} = \sigma_0 = \sigma_{\max}$, $\tau_{\alpha=0} = 0$;

2) $\alpha = 45°$: $\sigma_{\alpha=45°} = \frac{\sigma_0}{2}$, $\tau_{\alpha=45°} = \frac{\sigma_0}{2} = \tau_{\max}$;

3) $\alpha = 90°$: $\sigma_{\alpha=90°} = 0$, $\tau_{\alpha=90°} = 0$.

У поздовжніх перерізах відсутні нормальні й дотичні напруження; ^тах виникають у поперечних перерізах, а ^тах - в перерізах, нахилених до поперечного перерізу під кутом 45 °

Лекція 6. Центральний розтяг і стиск стрижнів Ч 2

План

1. Механічні властивості матеріалів
2. Дійсна діаграма розтягу
3. Випробування матеріалів на стиск
4. Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів

1. Механічні властивості матеріалів

Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в'язкості

Для вивчення поведінки матеріалів під навантаженням проводять випробування зразків, виготовлених із цього матеріалу в лабораторних умовах на спеціальних машинах, що, як правило, поділяються на машини з механічним та гідравлічним приводами.

Оскільки властивості матеріалів залежать від розмірів зразка, то для того,

щоб була можливість порівняти результати досліджень різних лабораторій, встановлюють нормами форми та розміри зразків випробування.

Найбільш розповсюдженим є випробування на розтяг, оскільки найбільш просто та повно отримують механічні властивості матеріалів. Під час випробування на розтяг приймають круглі та плоскі зразки.

Круглий зразок з параметрами: $\varnothing = 20$ мм, $l = 10 \cdot d$ нормальними. Решту називають-пропорційними.

Зразки бувають довгими і короткими:

$l = 10 \cdot d$ довгий зразок;

$l = 5 \cdot d$ – короткий зразок.

У результаті випробувань отримують графік залежності Р=£(Д1), який називають діаграмою розтягу; кожен матеріал має свою форму діаграми. Для м'якої сталі (Сталь 3) діаграму зображено на рис. 3.9.

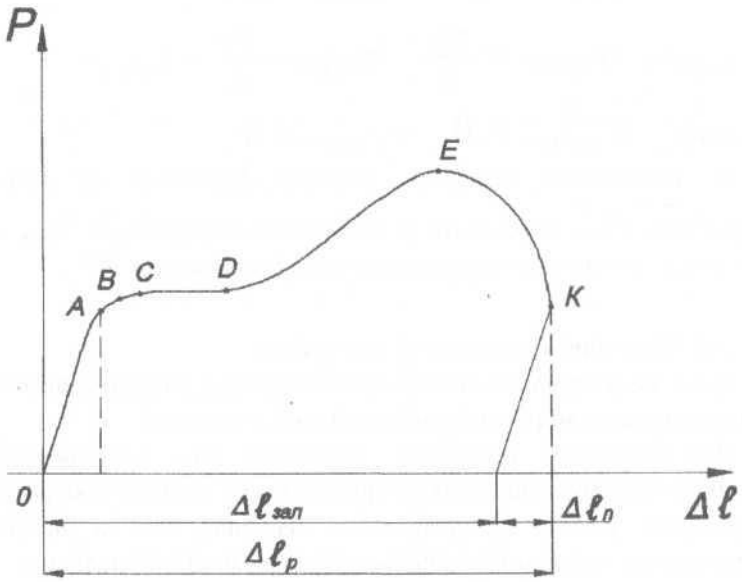


Рис. 3.9. Діаграма випробування на розтяг м'якої сталі.

Зручно цю діаграму відобразити у відносних величинах сі є (рис. 3.10):

де: $\sigma = \frac{P}{F_0}$; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$. ($F_0$ - початкова площа поперечного перерізу

l_o- довжина робочої частини зразка до завантаження

У початковій стадії завантаження залежність між Р і ЛІ - лінійна (від О до

точки А), потім лінійність зникає. Точка В - границя пружності. За деякої сили (точка С) матеріал деформується при сталій величині сили Р (текучість матеріалу).

В подальшому ділянка ВЕ - зона зміцнення матеріалу, точка Е - з'являється шийка; у подальшому ЕК - падаюча гілка діаграми. У точці К - руйнування.

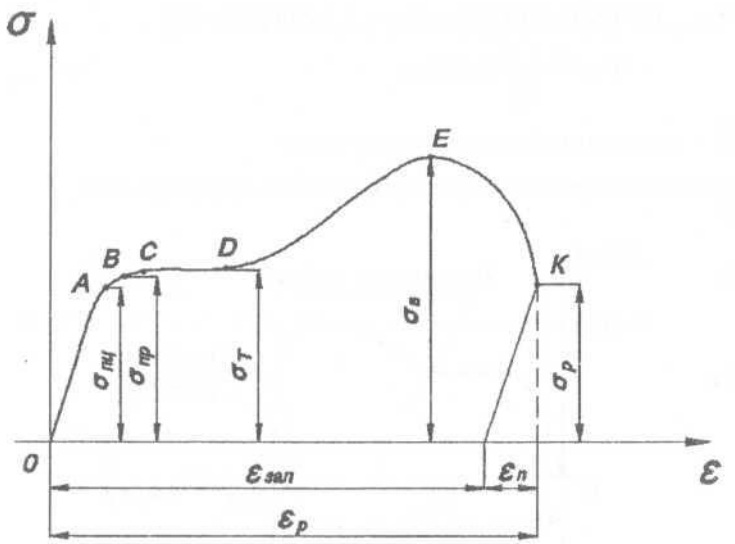


Рис. 3.10. Діаграма розтягання м'якої сталі у відносних координатах ст-є.

Відповідно до цього отримують такі механічні властивості матеріалу:

а) *характеристики міцності:*

$\sigma_{пц}$ – границя пропорційності (точка А), найбільш напружена точка, де справедливим є (виконується) закон Гука

$\sigma_{пр}$ – границя пружності (точка В), коли зразок відновлює свої розміри після зняття навантаження (відсутня залишкова деформація).

$\sigma_т$ - границя плинності - матеріал деформується (тече) при сталій величині сили Р.

$\sigma_в$ тимчасовий опір - це найбільше навантаження, яке витримує зразок.

$\sigma_р$ – напруження в момент руйнування *характеристики пластичності* відносне подовження після руйнування:

$$\delta = \frac{\Delta l_{зал}}{l_0} \cdot 100\%;$$

відносне звуження зразка в точці розриву:

$$\Psi = \frac{F_0 - F_{Ш}}{F_0} \cdot 100\%.$$

де $l_{зал}$ - залишкова абсолютна деформація;

$F_{ш}$ - - площа поперечного перерізу в шийці після руйнування

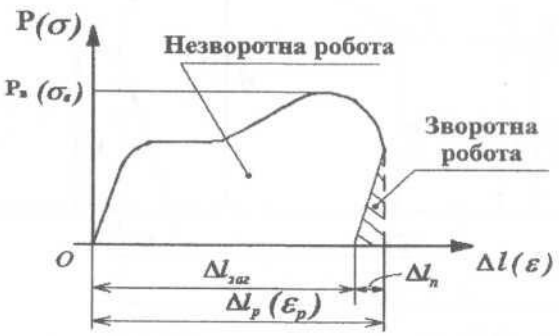


Рис. 3.13. Графічне відображення роботи

в) *характеристики в'язкості:*

В ’язкість ~ це здатність матеріалу поглинати механічну енергію в незворотному вигляді. Вона характеризується питомою роботою деформації.

Повна робота деформацій визначається (рис. 3.13):

$$A = \eta \cdot P_в \cdot \Delta l_p,$$

η коефіцієнт повноти діаграми розтягу

Питома робота - робота, що затрачена на руйнування одиниці об’єму зразка, визначається:

$$u = \frac{A}{V_0} = \eta \cdot \underbrace{\frac{P_в}{F_0}}_{\sigma_в} \cdot \underbrace{\frac{\Delta l_p}{l_0}}_{\varepsilon_р} = \eta \cdot \sigma_в \cdot \varepsilon_р.$$

***2.* Дійсна діаграма розтягу**

Розглянута діаграма *а-еє* умовною. Умовність полягає в тому, що не враховується зміна площі поперечного перерізу $Г_о$ і початкової довжини /#та рахуємо їх однаковими на всіх етапах навантаження, що не відповідає дійсності. Для дійсної діаграми справджується ряд залежностей:

$$\sigma_Д = \frac{P}{F_Д};$$

$$\Psi = \frac{F_0 - F_Д}{F_0} = 1 - \frac{F_Д}{F_0};$$

$$F_Д = F_0(1 - \Psi).$$

Без виведення отримаємо:

$$\varepsilon_{Д} = \frac{\Psi}{1-\Psi}.$$

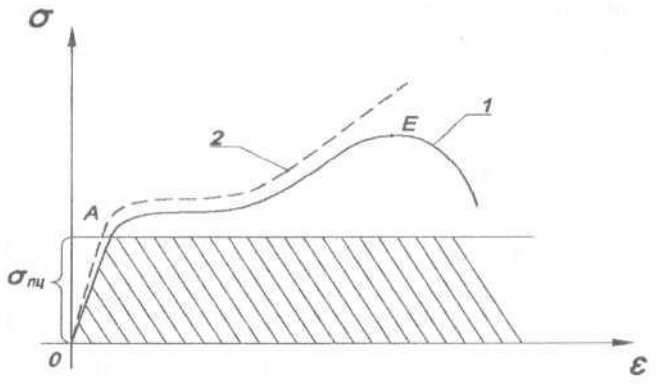


Рис. 3.14. Дійсна (2) та умовна (1) діаграми розтягу м’якої сталі.

Наклавши дійсну діаграму на умовну (рис. 3.14) побачимо, що на початковій стадії (особливо до точки Е) розбіжність між ними невелика, вона починається з моменту утворення шийки.

Оскільки нас цікавить напруження в межах пропорційності (заштрихована зона), то дійсна діаграма має чисто теоретичний інтерес і її використовують лише в спеціальних розрахунках.

3. **Випробування матеріалів на стиск**

У природі всі тверді матеріали поділяються на пластичні та крихкі.

Пластичні матеріали - це такі, у яких діаграма розтягу подібна до діаграми розтягу м’якої сталі.

Крихкі - діаграма подібна діаграмі чавуну.

Зрозуміло, що пластичний матеріал при стиску неможливо зруйнувати (він сплющується), і встановлено, що для пластичних матеріалів механічні характеристики при розтязі і стиску однакові, тому випробування пластичних матеріалів на стиск проводять досить обмежено.

Для крихких матеріалів міцність на стискання значно перевищує міцність на розтяг. Чавун - в 10 - 15 разів, бетон в 15 - 20 разів.

Під час випробувань на стиск для уникнення проблем стійкості випробовують короткі зразки циліндричної або кубічної форми *к - (2+3)cI* . Для

випробування деяких матеріалів використовують циліндричний зразок. У результаті випробування він набуває форми бочки і руйнується по площині під кутом 45° до вісі стрижня (рис. 3.15).

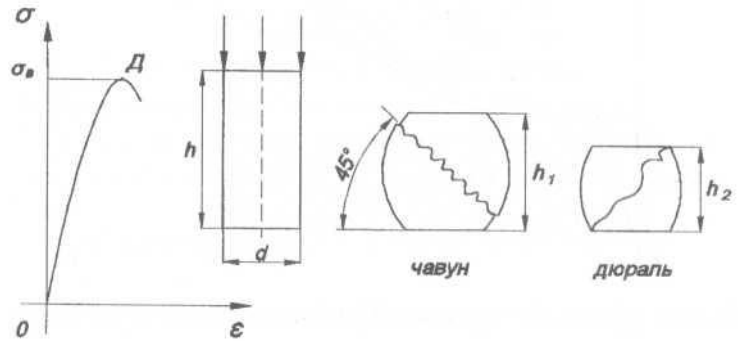


Рис. 3.15. Діаграма «Стиск і характер руйнування зразків крихких матеріалів».

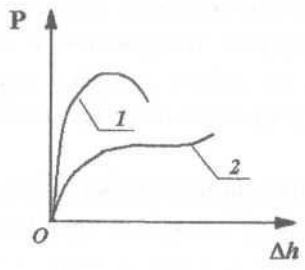


Рис. 3.16. Діаграма стиску дерева:

1 - вздовж волокон; 2 - впоперек волокон.

Особливим є випробування на стиск анізотропних матеріалів (рис. 3.16) таких, як дерево, що відрізняється випробуванням вздовж та впоперек волокон. Міцність деревини вздовж волокон значно вища, ніж впоперек.

4. Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів

На механічні характеристики матеріалів впливають різні фактори. Розглянемо найбільш суттєві.

Вплив температури - з підвищенням температури характеристики міцності зменшуються, а пластичності збільшуються.

Радіаційне опромінення - загальна характеристика:

- характеристики міцності збільшуються;
- пластичність збільшується.

Для деяких видів пластмас можливим є збільшення пластичності при у-випромінюванні.

Термічна обробка:

а) *відпалювання* - виконується для зняття початкових напружень, викликаних холодним обробітком деталі. Відпалювання знижує міцність і збільшує пластичність.

б) *гартування* - підвищує міцність і сильно зменшує пластичність (з'являється крихкість).

в) *відпуск* - виконується для зниження крихкості й збільшення пластичності із зниженням міцності.

г) *вплив швидкості навантаження* - із збільшення швидкості навантаження деталі характеристики міцності збільшуються, а пластичності зменшуються (рис. 3.17).

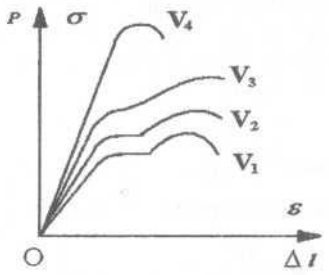


Рис. 3.17. Вплив швидкості навантаження на вид діаграми розтягу

$$V_4>V_3>V_2>V_1.$$

5. Потенційна енергія при розтязі-стиску

У результаті розтягу матеріалу сила виконує роботу на викликаних деформаціях. При цьому в середині зразка накопичується потенційна енергія (енергія деформацій), за рахунок якої зразок відновлює розміри та форму після зняття навантаження.

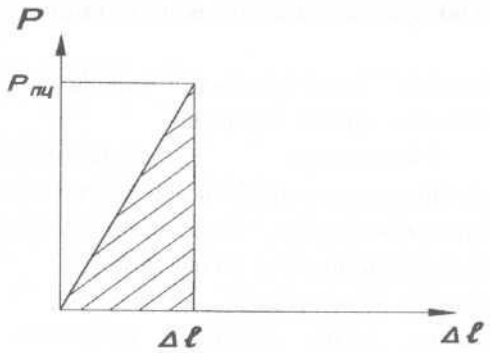


Рис. 3.18. Пружна частина діаграми розтягу-стиску.

У зоні пружних деформацій робота дорівнює потенційній енергії і визначається (рис. 3.18):

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta l,$$

Знаючи, що: $P = N,\ \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$, можемо отримати:

Вираз (3.31) - це повна потенційна енергія.

Питома потенційна енергія — це енергія, затрачена на деформацію одиниці об’єму зразка:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot \Delta l}{F_0 \cdot l_0} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}.$$

Враховуючи, що: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$,

отримаємо кінцевий вираз:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Лекція 7. Напружений стан в точці

План

1. Поняття напруженого стану в точці
2. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані (ПНС)
3. . Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані

1. Напружений стан в точці

На відміну від центрального розтягу-стиску, в загальному випадку навантаження тіла задача з визначення σ_{max} та τ_{max} є досить складною. Тобто виникає проблема так званого напруженого стану в точці (рис. 4.1).

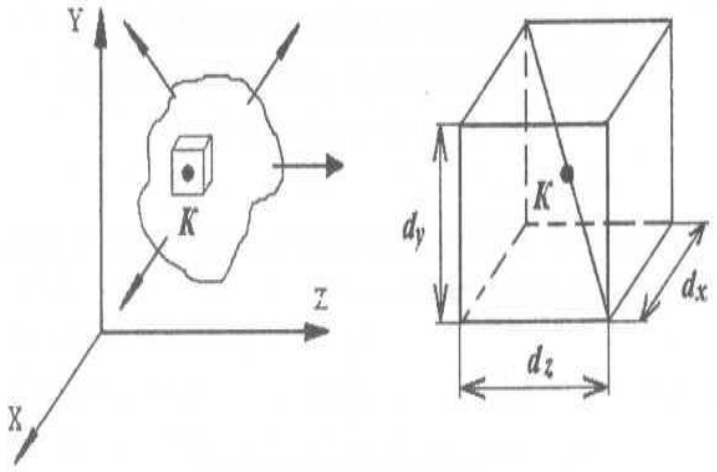


Рис. 4.1. Напружений стан у точці.

Напруженим станом у точці називають сукупність нормальних σ та дотичних ***τ*** напружень у всіх площинах, що проходять через задану точку.

Для з'ясування цього питання навколо точки К вирізають елементарний паралелепіпед (рис. 4.1). Внаслідок невеликої площі сторін вважають, що напруження у всіх точках його середини однакові й дорівнюють напруженням у точці К. Напруження на гранях паралелепіпеда розподілені рівномірно. Якщо припустити, що напруження на гранях нам відомі, то розітнувши паралелепіпед площиною, що проходить через точку К, за допомогою рівнянь статики, знаходять ***σ*** та τ на цій площині, виразивши їх через відомі напруження на гранях паралелепіпеда.

Існує таке положення паралелепіпеда, коли грані вільні від ***T 9*** а діють тільки &. При цьому існують три види напруженого стану (рис. 4.2): ***лінійний, плоский, об'ємний.***

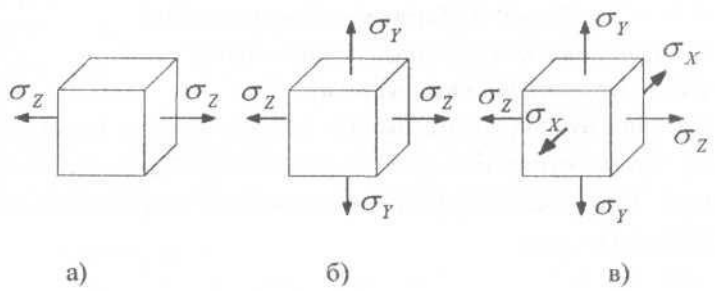


Рис. 4.2. Напружені стани в точці:

а - лінійний одноосьовий; б - плоский двохосьовий; в - об'ємний трьохосьовий.

На практиці найбільше розповсюдження отримав плоский напружений стан (ПНС) (рис. 4.3).

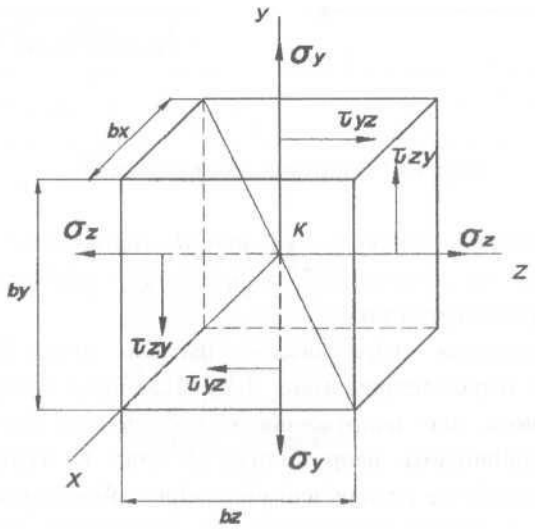


Рис. 4.3. Плоский напружений стан.

Правило знаків:

$\sigma > 0$, коли викликає розтяг;

Знак ***T*** визначається за правилом зовнішньої нормалі: якщо нормаль до площини збігається з додатним напрямом осі, то т > 0 якщо його напрям відповідає додатному напряму відповідної осі (рис. 4.4).

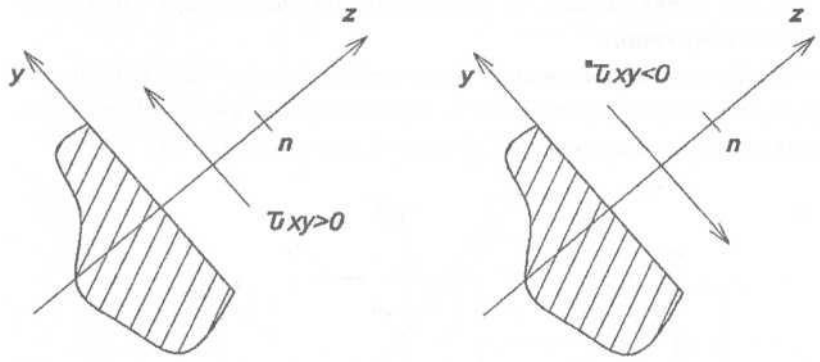


Рис. 4.4. Правило знаків для дотичних напружень .

2. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані (ПНС)

Оскільки об’єкт знаходиться в рівновазі, то маємо суму моментів відносно точки К. яка дорівнює НУЛЮ (рис. 4.3\

$$\sum M_K = 0,\ (\tau_{zy} \cdot dy \cdot 1)dz - (\tau_{yz} \cdot dz \cdot 1)dy = 0 .$$

Звідки матимемо: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$

Вираз 4.2. - ***закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані.***

Тобто у двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження рівні за величиною і напрямлені так, що прагнуть обертати площини у різні сторони (рис. 4.5):

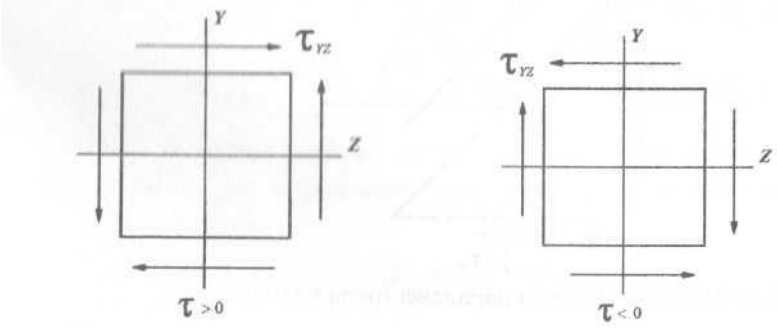


Рис. 4.5. Закон парності дотичних напружень.

3. Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані

Розітнемо елементарний паралелепіпед (рис. 4.3) площиною, перпендикулярною площині ЖУ, нахиленою під кутом ***CC*** до осі гі розглянемо рівновагу нижньої відсіченої частини (рис. 4.6).

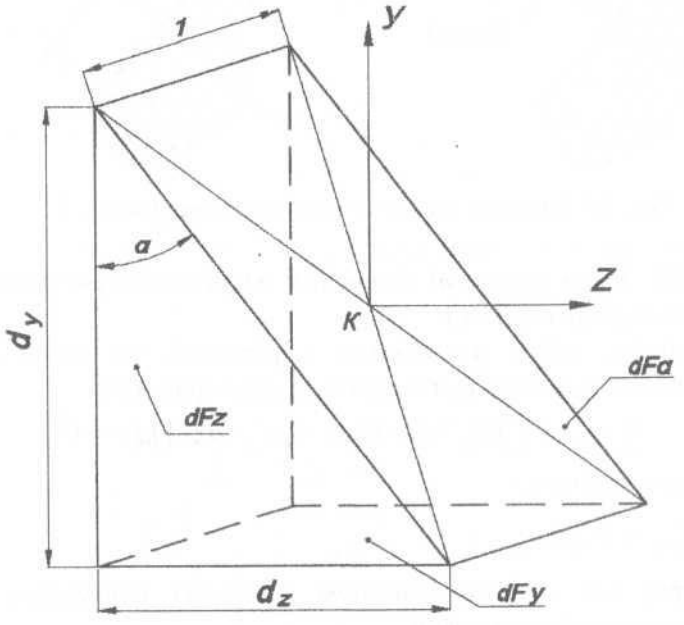


Рис. 4.6. Розсічена нижня частина паралелепіпеда

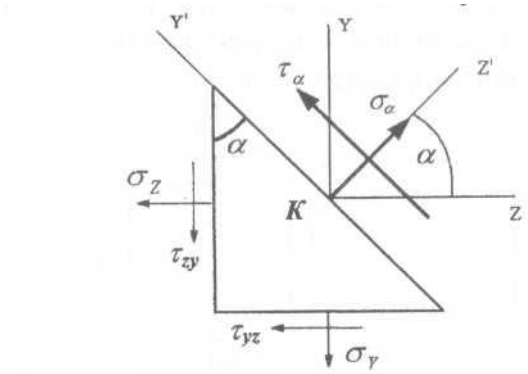


Рис. 4.7. Відсічена частина паралелепіпеда на площині.

Положення нахиленої площини визначається кутом α це кут між нормаллю до площини і додатним напрямком осі $^{z\,|}$(рис. 4.7).

Правило знаків: α > 0 якщо відповідає короткому шляху повертання осі *г* до .у (проти годинникової стрілки).

Очевидно, що $\begin{cases} dFz = dF_\alpha \cdot \cos\alpha \\ dFy = dF_\alpha \cdot \sin\alpha \end{cases}$

Для знаходження σ_α та τ_α спроектуємо всі зусилля на осі. та y'.

$$\sum Z' = 0;\ \sigma_\alpha - \sigma_z \cos\alpha - \tau_{yz} \cos\alpha - \tau_{zy} \sin\alpha = 0$$

$$\sum y' = 0;\quad \tau_\alpha - \tau_y \cos\alpha - \tau_{yz} \sin\alpha - \tau_{zy} \cos\alpha = 0$$

Виконуючи це, використавши вираз (4.2) та (4.3) і здійснюючи тригонометричні перетворення, отримаємо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha$$

Враховуючи, що

$$\cos^2 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2 = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Вираз (4.5) набуває вигляду

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha$$

Підставивши у вираз 4.6 замість $\alpha \to \alpha + 90,$ отримаємо:

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{zy}\sin 2\alpha$$

Склавши вирази (4.6) і (4.7), отримаємо властивість інваріантності нормальних напружень при плоскому напруженому стані (рис. 4.8):

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_z + \sigma_y = const .$$

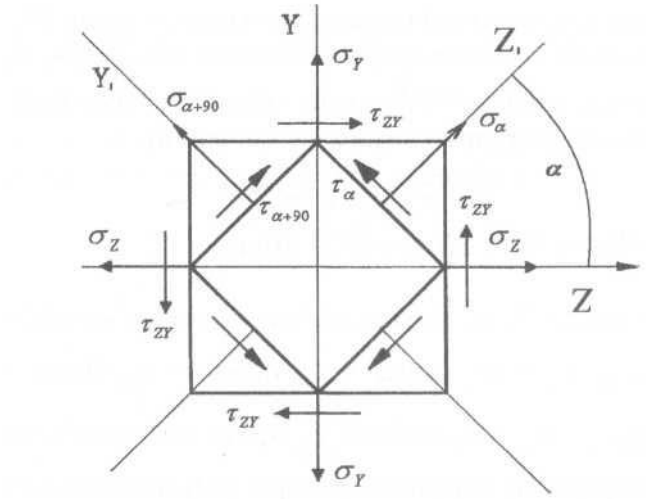


Рис. 4.8. Зображення інваріантності напружень.

Тобто сума нормальних напружень у двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через довільну точку є величиною постійною.

Лекція 8. Деформований стан у точці

План

1. Головні деформації.
2. Аналогія між залежностями напруженого та деформованого стану в точці.
3. Узагальнений закон Гука при об’ємному та плоскому напруженому станах.

2. Головні деформації

У загальному випадку плоского напруженого стану (ПНС) (рис. 1.) виникають нормальні (σ) і дотичні (τ) напруження. При цьому напруження σ викликає лінійну деформацію Δd_Z та Δd_Y (рис. 1), а напруження τ – кутову деформацію γ_{ZY} (кут зсуву).

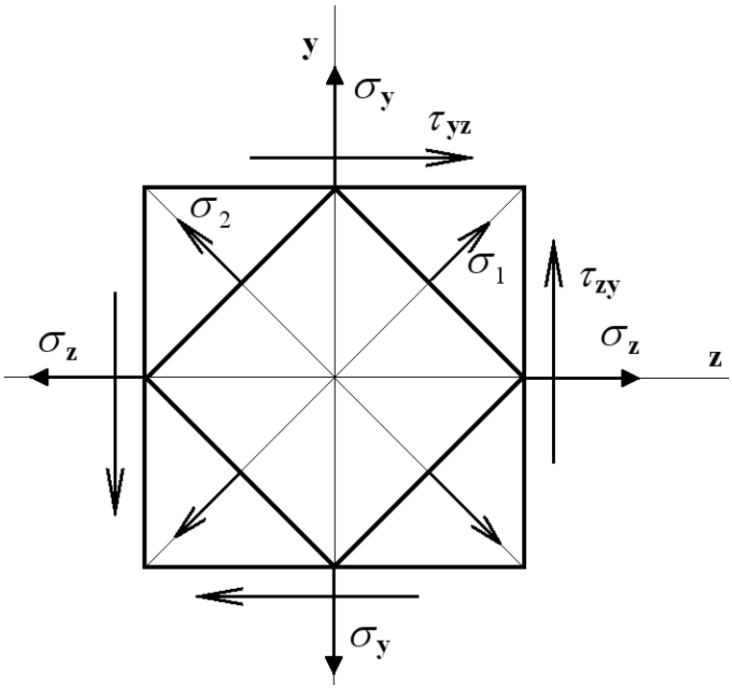


Рис. 1. Плоский напружений стан.

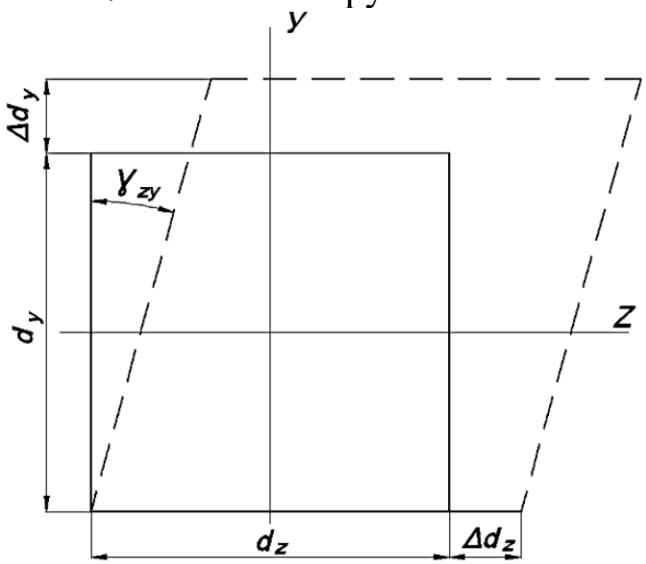


Рис. 2. Деформації при плоскому напруженому стані.

Відносні деформації визначаються:

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta d_Z}{d_Z}, \qquad \varepsilon_Y = \frac{\Delta d_Y}{d_Y} \tag{4.22}$$

При повороті координатних осей на деякий кут змінюватиметься величина σ і τ, а також відповідно ε та γ.

Таким чином, деформаційним станом у точці називають сукупність лінійних і кутових деформацій при всіх можливих положеннях координатних осей *Z* та *Y*.

З'ясовано, що у головних площинах відсутні дотичні напруження (τ), а значить у таких площинах відбуватимуться тільки лінійна деформація ($\gamma = 0$). При цьому лінійні деформації набувають екстремальних значень, такі деформації називають головними лінійними деформаціями і позначають ε_1 та ε_2 . При цьому прийнято, що $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

Знайдемо лінійну деформацію відрізка АС, який проходить під кутом α до напряму ε_1 (рис. 3).

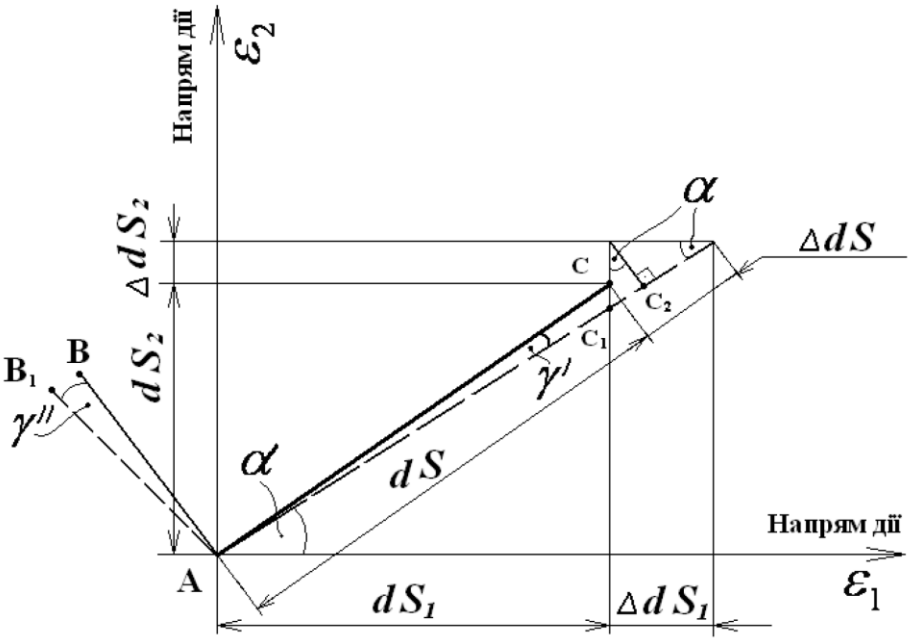


Рис. 3. Визначення деформацій у площинах через головні деформації.

ε та ε_2 – головні деформації, які задано.

Із рисунка зрозуміло, що:

$$\Delta dS = \Delta dS_1 \cdot cos\alpha + \Delta dS_2 \cdot \sin\alpha. \qquad (4.23)$$

Тоді відносна деформація відрізка АС дорівнює:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta dS}{dS} = \frac{\Delta dS_1}{dS} \cdot cos\alpha + \frac{\Delta dS_2}{dS} \cdot \sin\alpha. \qquad (4.24)$$

Якщо врахувати геометричне відношення з (рис. 2):

$$\cos\alpha = \frac{dS_1}{dS}; \quad \sin\alpha = \frac{dS_2}{dS}. \qquad (4.25)$$

Отримаємо:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta dS}{dS} = \underbrace{\frac{\Delta dS_1}{dS_1}}_{\varepsilon_1} \cdot \cos^2\alpha + \underbrace{\frac{\Delta dS_2}{dS_2}}_{\varepsilon_2} \cdot \sin^2\alpha = \qquad (4.26)$$

$$= \varepsilon_1 \cdot \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin^2\alpha$$

Виконавши тригонометричні перетворення, формула (4.26) набуде вигляду:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \qquad (4.27)$$

Із аналізу формули (4.27) видно:

при $\alpha = 0$, $cos\ 2\alpha=1$, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\max} = \varepsilon_1$.

при $\alpha = 90^0; \cos 2(\alpha + 90) = -\cos 2\alpha = -1$

$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\min} = \varepsilon_2$.

3. Аналогія між залежностями напруженого та деформованого стану в точці

$$\gamma' = \frac{CC_2}{dS} = \frac{\Delta dS_1 \cdot \sin\alpha}{dS} - \frac{\Delta dS_2 \cdot \cos\alpha}{dS} =$$

$$= \frac{\Delta dS_1 \cdot \sin\alpha}{dS_1 / cos\alpha} - \frac{\Delta dS_2 \cdot \cos\alpha}{dS_2 / \sin\alpha} =$$

$$= \frac{\Delta dS_1}{dS_1} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \frac{\Delta dS_2}{dS_2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

В остаточному варіанті маємо:

$$\gamma' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \qquad (4.28)$$

Для визначення кута *У* необхідно у вираз (4.28) підставити *а* + 90^0 і отримаємо:

$$\gamma'' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \tag{4.29}$$

Різні знаки виразів (4.28) та (4.29) свідчать про те, що відрізки повертаються в різні боки і загальний кут γ дорівнює:

$$\gamma = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin 2\alpha \ . \tag{4.30}$$

Відтворимо напружений та деформований стан у точці через головні площини (головні напруження і головні деформації):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos\alpha \\ \frac{\gamma_\alpha}{2} &= -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

Очевидно, що між виразами (4.31) та (4.32) маємо математичну аналогію у зміні напружень і деформацій у точці.

Вираз для визначення головних деформацій через довільні деформації має вигляд:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_Z + \varepsilon_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\varepsilon_Z - \varepsilon_Y)^2 + 4 \cdot (\frac{\gamma_{ZY}}{2})^2} \tag{4.33}$$

Якщо скласти ліву і праву частину виразу (4.33), то отримаємо властивість інваріантних лінійних деформацій:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_Z + \varepsilon_Y = const \ .$$

Відповідно до цього, тензор деформації Тд для плоского напруженого стану має вигляд:

$$T_Д = \begin{vmatrix} \varepsilon_Z; & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{ZY} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{YZ}; & \varepsilon_Y \end{vmatrix}, \tag{4.34}$$

А тензор напружень:

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_Z; & \tau_{ZY} \\ \tau_{YZ}; & \sigma_Y \end{vmatrix}. \tag{4.35}$$

4. Узагальнений закон Гука при об'ємному та плоскому напруженому станах

Закон Гука при лінійному напруженому стані $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Встановимо кількісний зв'язок між напруженням та деформацією: – при лінійному напруженому стані (розтяг–стиск) (рис. 4).

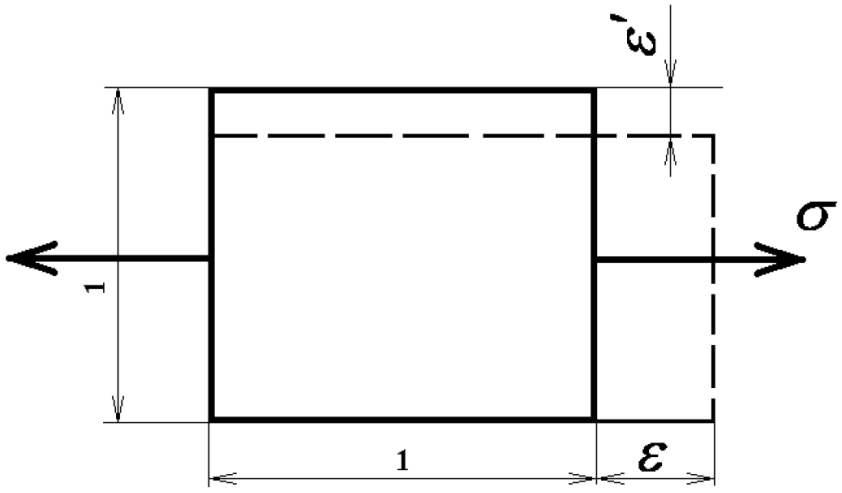


Рис. 4 Деформації при лінійному напруженому стані**.**

Очевидно, що:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Відносна поперечна деформація:

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E} \tag{4.36}$$

$$\left| -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \mu \text{ - коефіцієнт Пуансона} \tag{4.37}$$

– при об’ємному напруженому стані (рис. 4.):

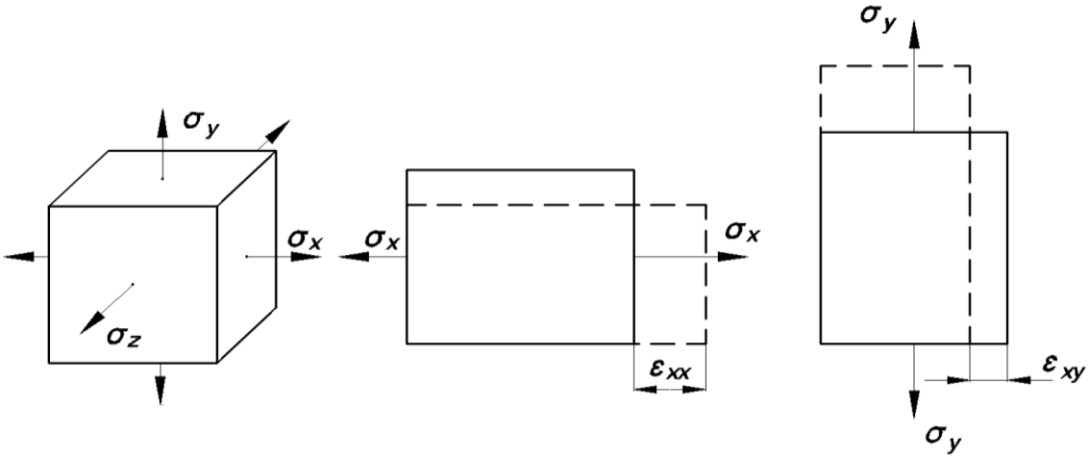


Рис. 4. Деформації при об’ємному напруженому стані.

$$\varepsilon = \varepsilon_{XX} + \varepsilon_{XY} + \varepsilon_{XZ} . \tag{4.38}$$

Використавши вираз (4.36), отримаємо таку залежність:

$$\varepsilon_X = \frac{\sigma_X}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_Y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_Z}{E} . \tag{4.39}$$

Аналогічно для напряму осей Y та Z отримаємо узагальнений закон Гука при об’ємному напруженому стані.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_X &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_X - \mu(\sigma_Y + \sigma_Z)] \\ \varepsilon y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_Y - \mu(\sigma_X + \sigma_Z)] \\ \varepsilon z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_Z - \mu(\sigma_Y + \sigma_X)] \end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

Для плоского напруженого стану, коли $\sigma_x = 0$.

Узагальнений закон Гука має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_Y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_Y - \mu \cdot \sigma_Z] \\ \varepsilon_Z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_Z - \mu \cdot \sigma_Y] \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

Коли

$\sigma_x = 0$ - лінійна деформація у цьому напрямку не дорівнює нулю, а визначається:

$$\varepsilon_X = -\frac{\mu}{E} \cdot [\sigma_Y + \sigma_Z]. \qquad (4.42)$$

нколи виникає необхідність виражати напруження через деформації. Для цього другий рядок виразу (4.41) множать на μ та складають з першим:

$$\varepsilon_Y + \mu \cdot \varepsilon_Z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_Y - \mu^2 \cdot \sigma_Y],$$

Звідси знаходять σ_y і σ_z:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_Y &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_Y + \mu \cdot \varepsilon_Z) \\ \sigma_Z &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_Z + \mu \cdot \varepsilon_Y) \end{aligned}\right\} \qquad (4.43)$$

Лекція 9. Теорії міцності.

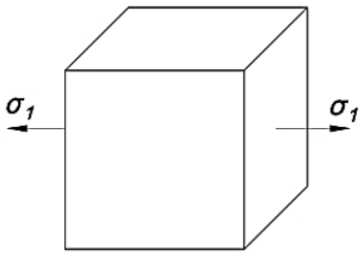
План

1. Загальні поняття про теорії міцності
2. Теорії міцності.
   a. I теорія міцності
   2.2 II теорія міцності
   2.3 III теорія міцності
   2.4 IV енергетична теорія міцності

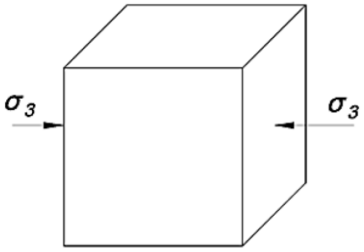
1. Загальні поняття про теорії міцності

Основним питанням механіки матеріалів і конструкцій є оцінка міцності матеріалу за заданим напружено-деформованим станом, тобто за головними напруженнями (максимальними напруженнями σ_{max} та τ_{max}).

Для лінійного (одноосного) напруженого стану, яким є центральний розтяг або стиск, ця задача розв'язується досить просто й умови міцності такі:



$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \le [\sigma_+] = \frac{\sigma_{неб}}{n}; \qquad (4.56)$$



$$\sigma_{\min} = \sigma_3 \le [\sigma_-] = \frac{\sigma_{неб.}}{n}; \qquad (4.57)$$

де: $\sigma_{неб.}$ – небезпечне напруження, що залежить від виду матеріалу ; n – коефіцієнт запасу міцності.

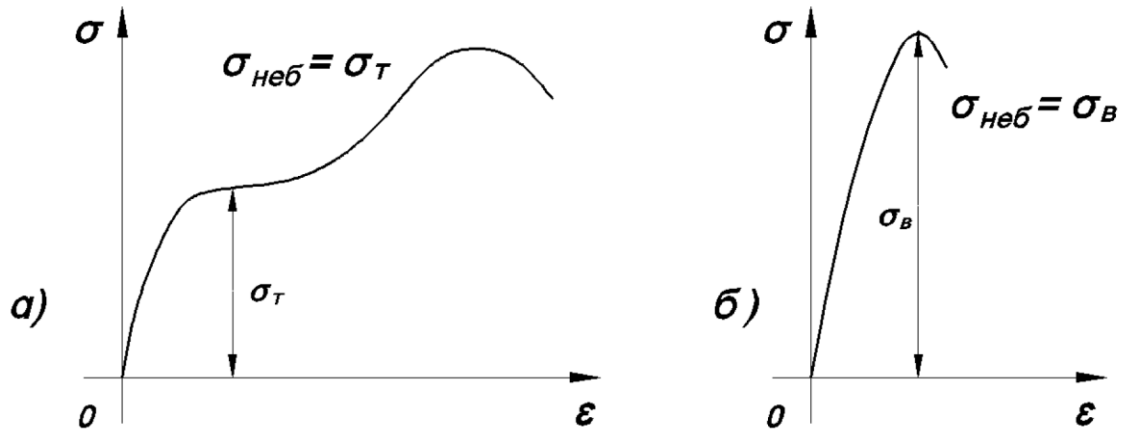


Рис. 1. Діаграми розтягу-стиску: а) пластичний матеріал; б) крихкий матеріал.

При більш складних видах напруженого стану, коли два або три головні напруження не дорівнюють нулю, як підтвердили досліди, небезпечний стан (руйнування) залежить не тільки від $\sigma_{\max}$ і $\sigma_{\min}$, але й від співвідношення між ними, яких може бути безліч.

Вважають, що: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; (4.58)

Тому прямий шлях розв’язання задачі неможливий не тільки через складність досліду, але й через їх нескінченну кількість.

Роблять так: вводять гіпотезу про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншого фактору (σ, τ, ε, u) і вважають, що небезпечний стан матеріалу наступить тоді, коли величина цього фактору досягне граничного значення, яке встановлюється під час розтягу або стиску. Таким чином, ми встановлюємо еквівалентність складного напруженого стану і лінійного (одноосьового). На сьогодні існує декілька таких гіпотез, які отримали назву «Теорії міцності».

2. Теорії міцності.

2.1 I теорія міцності I теорія міцності (теорія найбільших нормальних напружень), запропонована Галілео Галілеєм у XVII ст.

Згідно з цією теорією вважають, що небезпечний стан матеріалу наступить тоді, коли величина максимальних нормальних напружень $\sigma_{\max}$ досягне граничного стану $\sigma_{неб.}$, яке встановлюється при простому розтягу, і умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \le [\sigma] = \frac{\sigma_{неб.}}{n}. \qquad (4.59)$$

Дослідна перевірка підтвердила, що ця теорія не може застосовуватись (дає великі похибки) практично для всіх матеріалів. Вона дає більш-менш правдиві дані під час розтягу дуже крихких матеріалів (скло, граніт, цегла тощо).

2.2 II теорія міцності

II теорія міцності (теорія найбільшої лінійної деформації), запропонована Едме Маріоттом в 1682 році.

Згідно з якою вважають, що міцність матеріалу буде порушена, коли величина максимальної лінійної деформації ϵ_{max} досягне граничного значення $\epsilon_{неб.}$, яке встановлюється під час центрального розтягу (лінійному одноосному стані) і умова міцності має вигляд:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \le [\varepsilon] = \frac{\varepsilon_{неб.}}{n} \tag{4.60}$$

Враховуючи закон Гука при об'ємному напруженому стані, маємо:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \tag{4.61}$$

При лінійному напруженому стані:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}, \qquad => \qquad \varepsilon_{неб.} = \frac{\sigma_{неб.}}{E}. \tag{4.62}$$

Підставивши (4.61) та (4.62) в (4.60), маємо:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]. \tag{4.63}$$

де: μ – коефіцієнт поперечної деформації.

$$\mu = \left| -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \tag{4.64}$$

Досліди підтвердили, що ця теорія непридатна для більшості матеріалів, її можна застосовувати лише для крихких матеріалів (міцних легованих та вуглеводистих сталей). При цьому максимальне напруження σ_1 повинно бути додатним ($\sigma_1 > 0$), тобто розтягу.

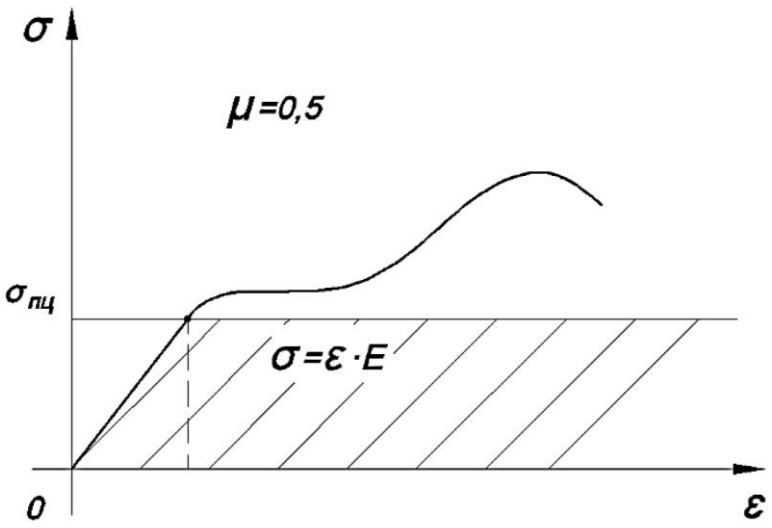


Рис. 2. Графічна зона пропорційності.

Недолік: можливо застосовувати лише в зоні пропорційності (рис. 2).

2.3 III теорія міцності III теорія міцності (теорія найбільших дотичних напружень). Ця теорія запропонована Шарлем Огюстеном Кулоном в 1773 році.

Згідно з цією теорією вважають, що небезпечний стан (руйнування) матеріалу відбудеться тоді, коли величина максимального дотичного напруження τ_{max} досягне граничного стану $\tau_{неб.}$, який встановлюється при центральному розтягу і умова міцності має вигляд:

$$\tau_{max} \le [\tau] = \frac{\tau_н}{n}. \qquad (4.65)$$

Відомо, що

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

а при центральному розтягу-стиску

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

Підставивши, отримаємо:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le (\sigma).$$

Дослідна перевірка підтвердила, що ця теорія спрацьовує для пластичних матеріалів, в яких механічні властивості однакові як на розтяг, так і на стиск. Недолік – вона не враховує середнього напруження σ_2.

2.4 IV енергетична теорія міцності IV енергетична теорія міцності (теорія формозміни). Вона запропонована Губером (Максиміліаном Титусом Губером) в 1904 році. Згідно з цією теорією припускають, що порушення міцності матеріалу відбудеться тоді, коли питома потенційна енергія формозміни при об'ємному напруженому стані досягне граничного стану, який встановлюється при центральному розтягу в момент настання плинності матеріалу.

Момент настання плинності матеріалу при лінійному напруженому стані (рис. 3):

$$U_ф \le [U_ф]_T \tag{4.67}$$

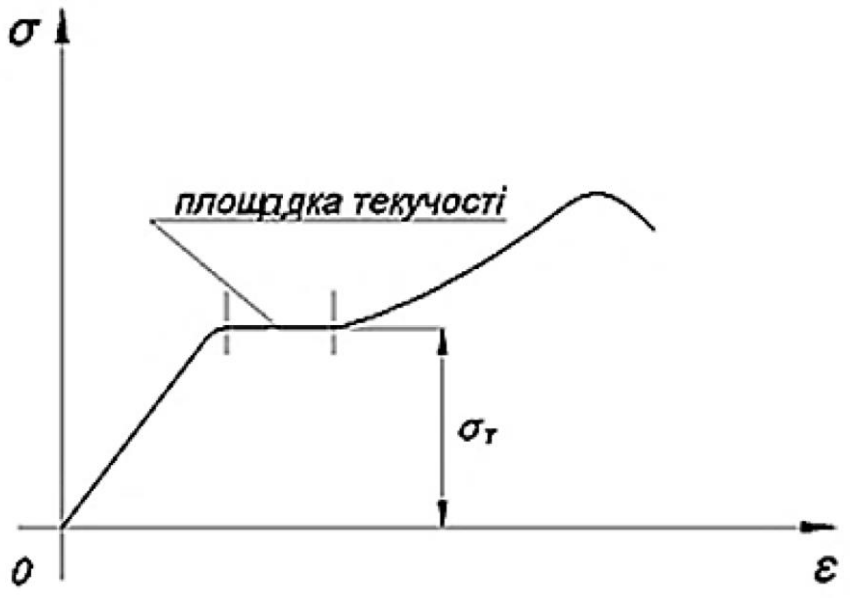


Рис. 3. Діаграма розтягу-стиску.

Відомо, що при об’ємному напруженому стані питома потенційна енергія дорівнює:

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]. \tag{4.68}$$

При центральному розтягу (лінійному напруженому стані), коли $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, а $\sigma = \sigma_T$ матимемо:

$$(U_ф)_T = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_T^2 . \tag{4.69}$$

Порівнявши (4.68) і (4.69), маємо:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_T . \tag{4.70}$$

Вираз (4.70) зручно представити так:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_T . \tag{4.71}$$

Із виразу (4.71) отримаємо умову міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le [\sigma]=\frac{\sigma_T}{n}. \qquad (4.72)$$

Дослідна перевірка підтвердила, що IV теорія міцності успішно застосовується практично для всіх матеріалів.

Для плоского напруженого стану, який виникає при згині стрижня, умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{екв}^{IV}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2} \le [\sigma]. \qquad (4.73)$$

Лекція 10. Кручення та зсув.

План

1. Зсув
   1.1 Поняття про чистий зсув
   1.2 Закон Гука при чистому зсуві
2. Залежність між модулями пружності при розтягу та зсуві

1.1 **Поняття про чистий зсув.** У деяких випадках міцність і жорсткість конструкції пов’язана з опором матеріалу деформаціям зсуву, які викликані дотичними напруженнями τ. Розглянемо найбільш простий випадок зсуву – чистий зсув. Чистий зсув – коли в двох взаємно перпендикулярних площинах діють тільки дотичні напруження τ. При цьому подовження сторін відсутнє, а виникає тільки кутова деформація (рис. 1).

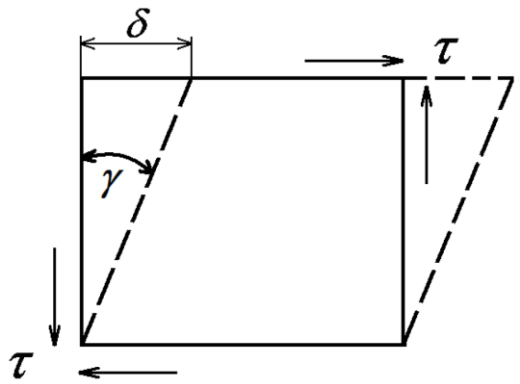


Рис. 5.1. Деформація при чистому зсуві.

Прийнявши площадки чистого зсуву за вихідні, напруження в інших площинах визначатимуться за формулами (рис. 5.1):

$$\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha\,, \tag{5.1}$$

$$\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha\,. \tag{5.2}$$

оскільки

$$\sin 2(\alpha + 90) = -\sin 2\alpha\,.$$

Очевидно із виразу (5.1):

$$\sigma_\alpha = -\sigma_{\alpha+90}\,, \tag{5.3}$$

Вираз (5.3) є законом парності нормальних напружень при чистому зсуві.

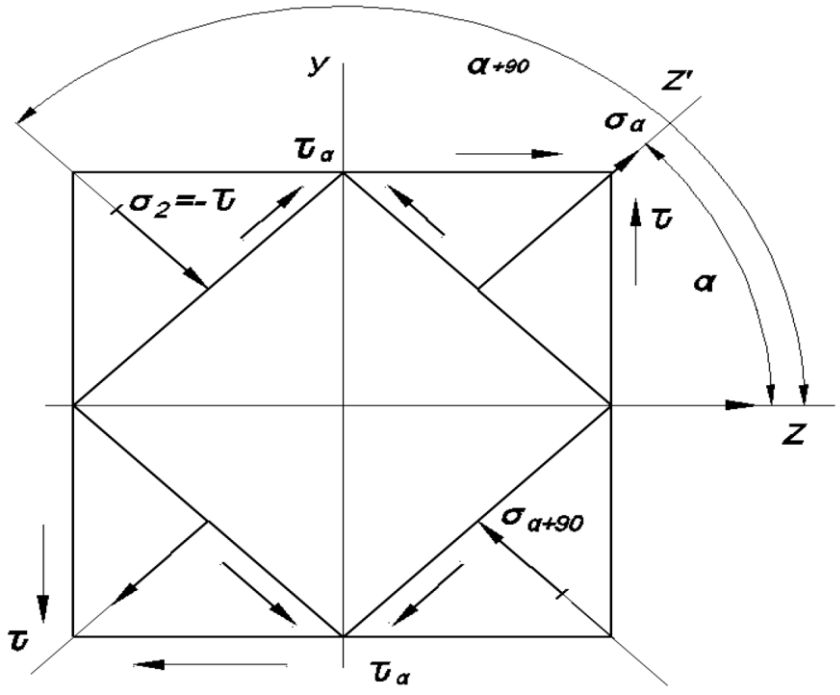


Рис. 5.2. Визначення напружень при повороті площин чистого зсуву.

Із аналізу виразів (5.1) і (5.2) маємо такі рівності (рис. 5.3):

$$\alpha = 0, \qquad \sigma_\alpha = 0, \qquad \tau_\alpha = \tau_{\max}.$$

$$\alpha = 45^0, \qquad \sigma_\alpha = \tau, \qquad \tau_\alpha = 0.$$

$$\alpha = 135^0, \qquad \sigma_\alpha = -\tau, \qquad \tau_\alpha = 0.$$

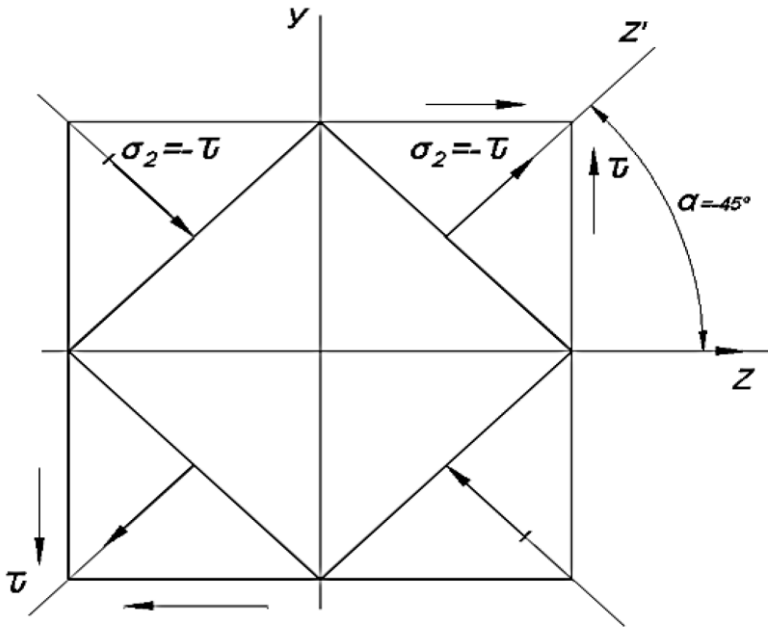


Рис. 5.3. Напруження в площинах при куті 45 º, щодо площин чистого зсуву.

Таким чином, головні площини із площинами чистого зсуву становлять кут 45°. Головні напруження за модулем дорівнюють дотичним. Чистий зсув - це єдиний випадок напруженого деформованого стану, при якому змінюється форма зразка, а об'єм лишається незмінним. Це зрозуміло із виразу:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \qquad (5.4)$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 = -\sigma_2 = \tau; \qquad \theta = 0.$$

1.2. Закон Гука при чистому зсуві Деформація зразка при чистому зсуві характеризується (рис. 5.4):

δ – абсолютний зсув;

$\frac{\delta}{a} = \gamma$ – відносний зсув (кут зсуву).

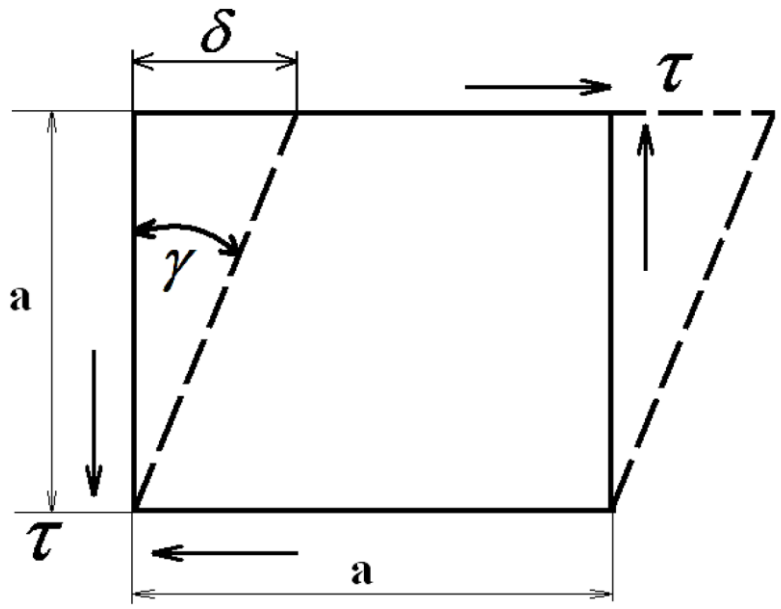


Рис. 5.4. Деформації при чистому зсуві.

Для пластичних матеріалів ця залежність $\tau - \gamma$ має вигляд (рис. 5.5).

У зоні пропорційності між τ і γ існує лінійна залежність, яка називається законом Гука при зсуві:

$$\tau = G \cdot \gamma \,. \qquad (5.5)$$

G – модуль пружності 2–го роду, або модуль пружності при зсуві.

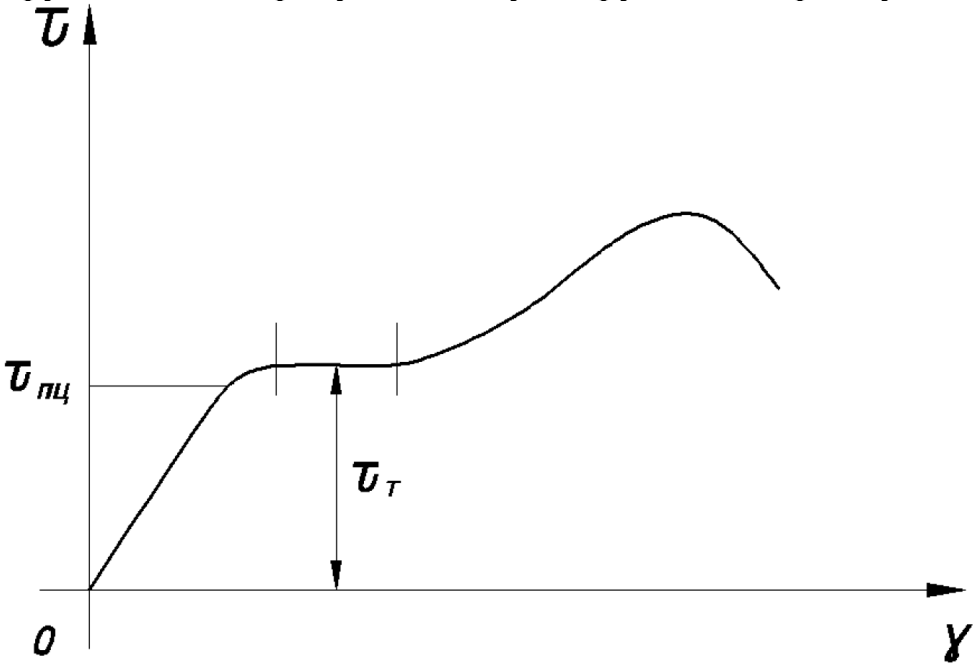


Рис. 5.5 Діаграма τ– γдля пластичних матеріалів.

Цікаво відмітити, що для більшості матеріалів має місце така залежність:

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}. \qquad (5.6)$$

2. Залежність між модулями пружності при розтягу та зсуві

Розглянемо плоский напружений стан в точці і покажемо в ній площадки чистого зсуву й головні площини з відповідними напруженнями (рис. 5.6).

Із рис. 5.6 видно, що деформацію діагоналі елемента можна представити двояко. З одного боку, вона викликана деформацією зсуву, а значить залежить від дотичних напружень τ, пов'язаних з модулем пружності G . З другого боку, цю діагональ можна уявити як волокно, яке розтягується від напруження σ_1 і стискається від напруження σ_2 , а значить залежить від модуля пружності E . Тобто очевидно, що між G та E існує залежність.

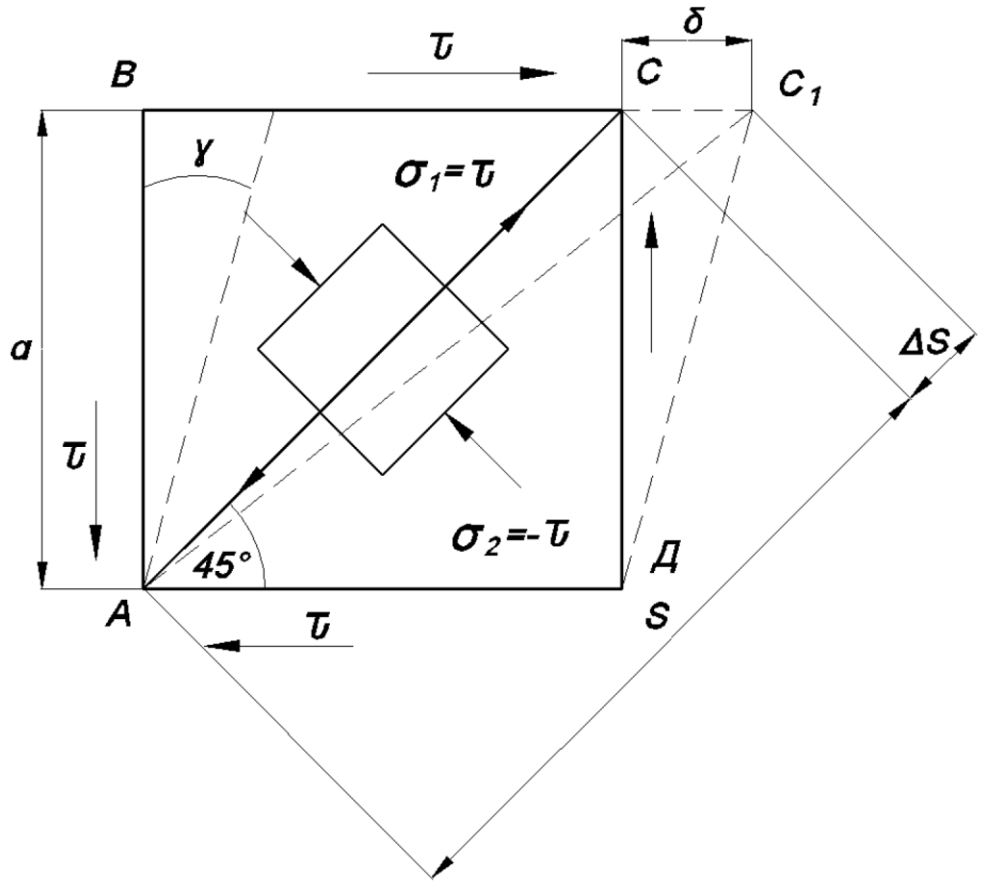


Рис. 5.6. Деформація елемента при чистому зсуві.

Із (рис. 5.6) очевидно:

$$\Delta S = \delta \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \gamma \,, \tag{5.7}$$

$$a = S \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S \,; \qquad \gamma = \frac{\tau}{G} \,.$$

Тоді: $$\Delta S = \frac{\tau}{2 \cdot G} \cdot S \,. \tag{5.8}$$

З іншого боку – вид розтягу можна записати:

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{S} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2) \,; \tag{5.9}$$

$$\sigma_1 = \tau \,, \quad \sigma_2 = -\tau \,.$$

$$\Delta S = \frac{(1+\mu)\tau}{E} \cdot S \,. \tag{5.10}$$

Порівнявши (5.8) та (5.10), маємо теоретичну залежність між модулями пружності при розтягу-стиску E та зсуві G

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \qquad (5.11)$$

Лекція 11 Кручення.

План

1. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр.
2. Напруження та деформації при крученні круглого валу.
3. Кручення стрижня прямокутного поперечного перерізу

1. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр.

Якщо в поперечному перерізі стрижня виникає тільки один внутрішній фактор – крутний момент, а решта внутрішніх зусиль дорівнює нулю, то він знаходиться в умовах кручення. Стрижні, які «працюють» на кручення, «роблять», як правило, круглого поперечного перерізу і називаються валами. Для визначення крутного моменту в поперечному перерізі вала застосовують метод перерізів, згідно з яким він дорівнює сумі зовнішніх моментів, прикладених до будь–якої із відсічених частин вала (рис. 5.12).

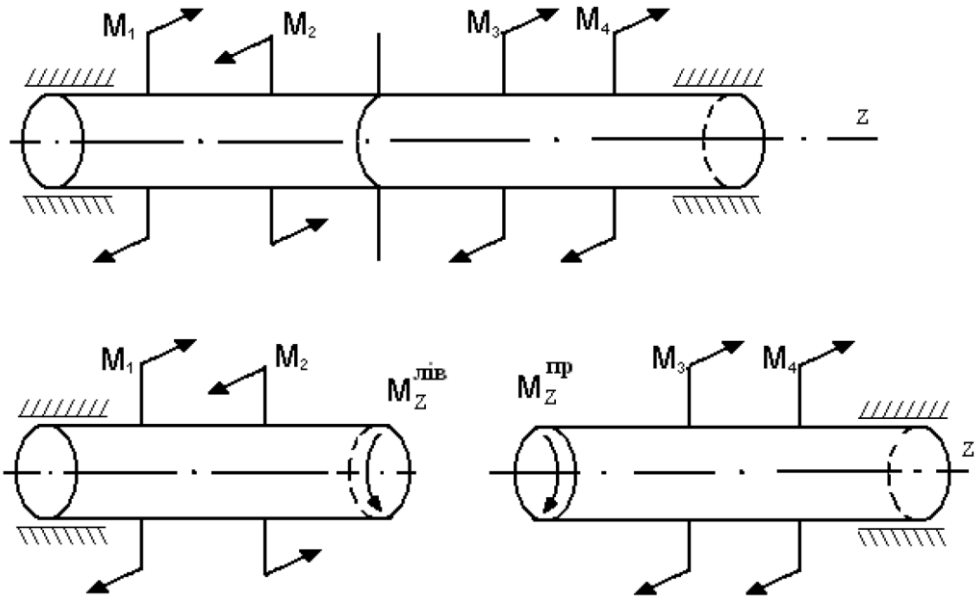


Рис. 5.12. Схема завантаження вала.

Правило знаків: крутний момент $M_{кр}$ вважається додатним, якщо при погляді на поперечний переріз вала з боку зовнішньої нормалі він напрямлений за ходом годинникової стрілки.

$$\sum M_z = -M_1 + M_2 - M_3 - M_4 = 0\ ; \qquad (5.24)$$

$$\sum M_z^{лів} \quad -M_1 + M_2\ ; \quad \sum M_z^{пр} \quad M_3 + M_4\ .$$

Якщо знайти значення крутних моментів в цілій низці поперечних перерізів, то можна побудувати епюру крутних моментів, яка показує зміну крутного моменту по довжині валу. Епюра ***$M_{кр}$*** будується від базисної лінії. Покажемо на конкретному прикладі побудову епюри крутних моментів. Визначаємо значення *M.* в характерних перерізах вала (рис. 5.13), якими є початок і кінець вала, а також точки прикладання зовнішніх зосереджених крутних моментів.

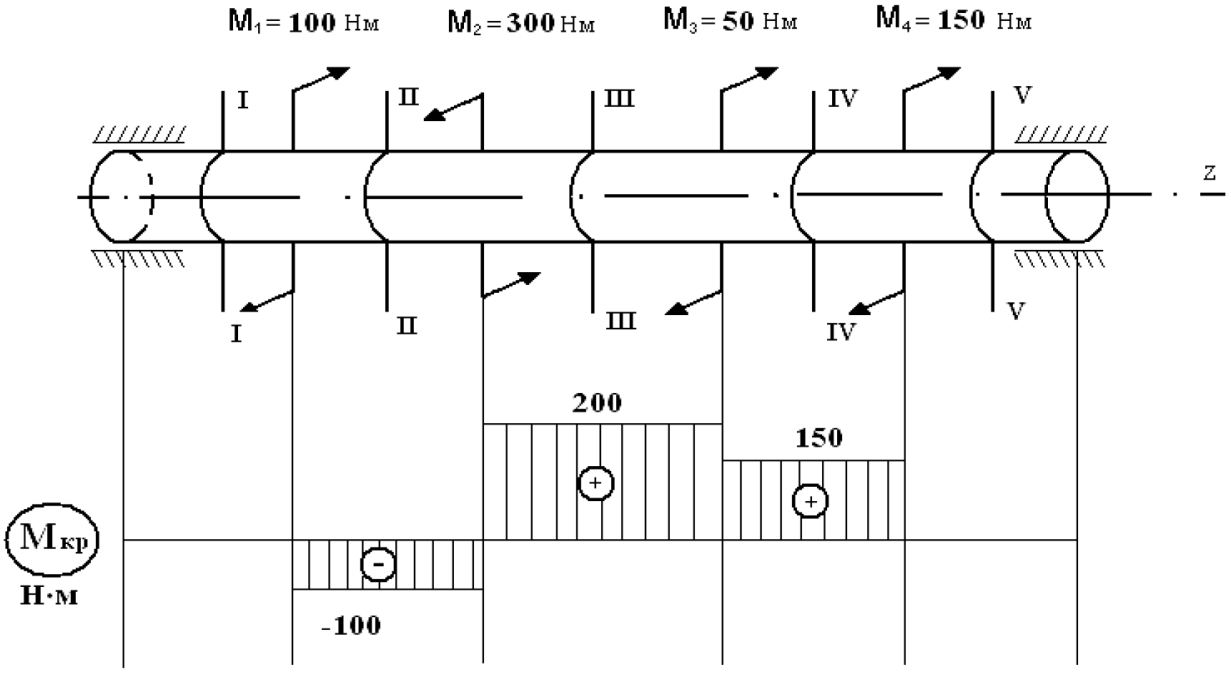


Рис. 5.13. Схема завантаження вала та епюра $M_{кр}$.

$$\sum M_z^I = 0;$$
$$\sum M_z^{II} = -M_1 = -100 \ H \cdot м;$$
$$\sum M_z^{III} = -M_1 + M_2 = -100 + 300 = 200 \ H \cdot м;$$
$$\sum M_z^{IV} = M_4 = 150 \ H \cdot м;$$
$$\sum M_z^V = 0.$$

2. Напруження та деформації при крученні круглого валу

За допомогою рівнянь статики неможливо знайти характер розподілу напружень по поперечному перерізу вала. Тому нанесемо на бокову поверхню круглого вала сітку з поперечних та поздовжніх рисок (рис. 5.14). У результаті прикладання крутного моменту нанесені прямокутники трансформуються, при цьому поперечні риски залишаються прямими і відстань між ними не змінюється. Це свідчить про те, що подовження волокон відсутнє. На підставі цього сформовано робочі гіпотези, які покладені в основу подальших висновків.

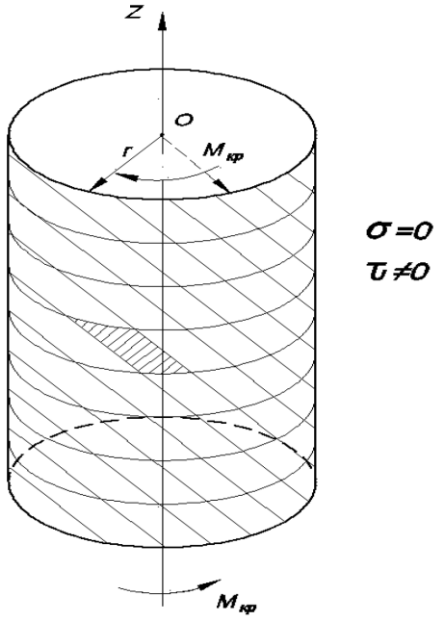


Рис. 5.14. Вал з нанесеними рисками.

При крученні круглого стрижня справедливою є гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Радіус, уявно проведений, після деформації

залишається прямим. Це дає можливість представити кручення як результат зсуву поперечних перерізів одних відносно інших.

Розглянемо деформацію вала (рис. 5.16).

Деформація характеризується:

γ - кут зсуву;

φ – кут закручування.

Розглянемо ділянку валу довжиною *dz* (рис. 5.17).

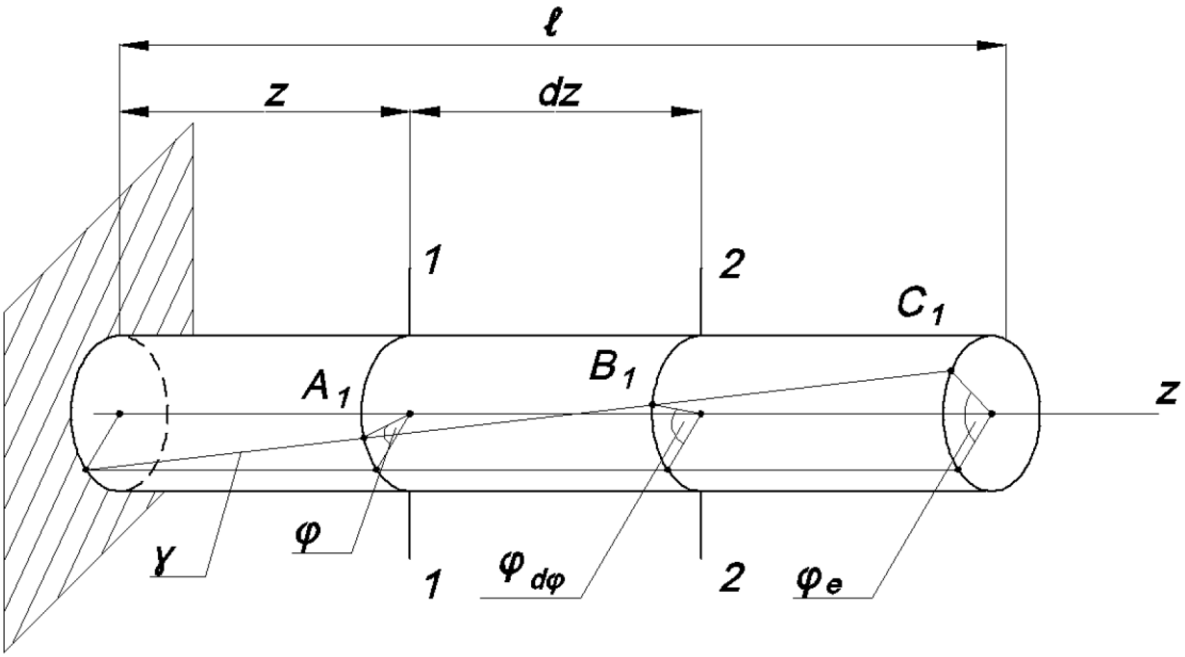


Рис. 5.17. Деформація вала.

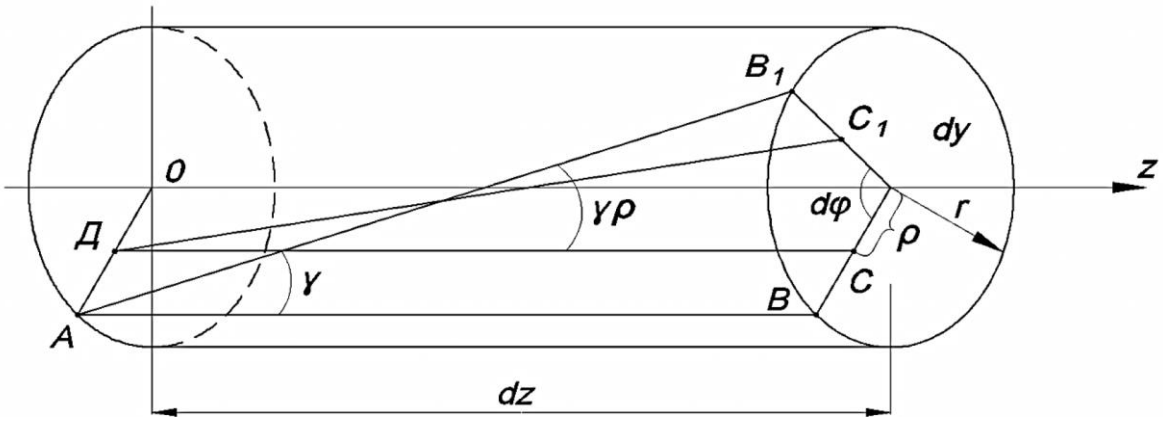


Рис. 5.18. Деформація відрізку вала довжиною *dz* .

Кут зсуву на поверхні вала дорівнює:

$$\gamma = \frac{BB_1}{AB} = \frac{r \cdot d\varphi}{dz};$$

Для довільного волокна на відстані ρ від центру ваги:

$$\gamma_\rho = \frac{CC_1}{ДС} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dz}.$$

Використовуючи закон Гука при чистому зсуві, маємо:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot r; \qquad (5.25)$$

$$\tau_\rho = G_{\gamma_\rho} = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho. \qquad (5.26)$$

Вирази (5.25) та (5.25) свідчать про те, що дотичні напруження по поперечному перерізу вала розподілені за лінійним законом і епюра ***T*** має вигляд, наведений на рис. 5.19.

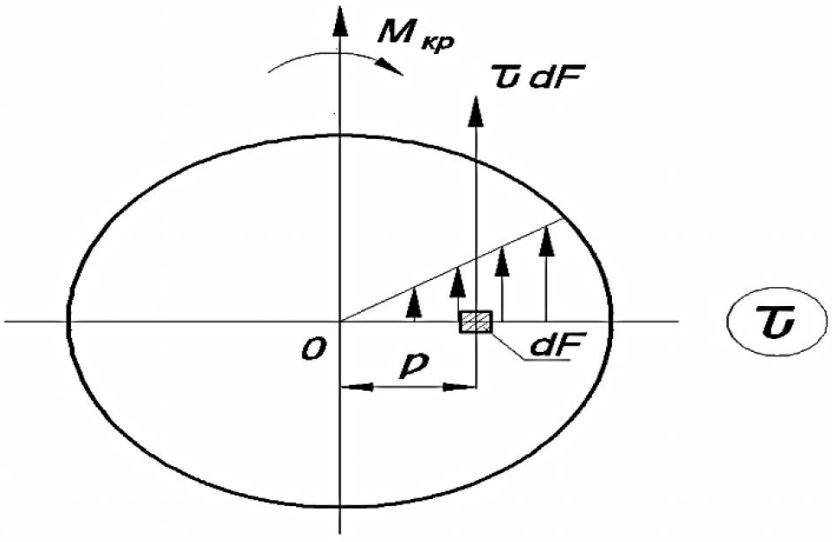


Рис. 5.19. Розподілення дотичних напружень по поперечному перерізі вала.

Для виключення з виразів (5.25) та (5.26) частини $\frac{d\varphi}{dz}$, знайдемо внутрішній крутний момент.

$$dM_{кр} = \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho;$$

$$M_{кр} = \int_F \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho = \int_F G\frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho \cdot dF \cdot \rho = G\frac{d\varphi}{dz}\int_F \rho^2 \cdot dF \,. \quad (5.27)$$

Враховуючи, що $\int_F \rho^2 \cdot dF = I_\rho$ – полярний момент інерції, отримаємо:

$$M_{кр} = G\frac{d\varphi}{dz} \cdot I_\rho; \quad (5.29$$

Звідси матимемо:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_p} \,. \quad (5.30)$$

Підставивши (5.29) в (5.30), отримаємо, що:

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{I_p \cdot G} G \cdot \rho = \frac{M_Z}{I_p} \cdot \rho \,. \quad (5.31)$$

Очевидно, що

$$\tau_{\max} = \frac{M_Z}{I_p} \cdot r = \frac{M_Z}{I_p / r},$$

де $\frac{I_p}{r} = W_\rho$ – полярний момент опору.

Тоді

$$\tau_{\max} = \frac{M_Z}{W_\rho} \,. \quad (5.32)$$

Умова міцності валу при крученні:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{Z\ \max}}{W_\rho} \le [\tau]. \quad (5.33)$$

де: *[τ]* – допустиме дотичне напруження, що приводиться у нормах.

Із виразу (5.33) можливе розв’язання задачі за знаходження діаметра вала при заданому навантаженні та матеріалі:

$$W_\rho = \frac{M_{Z\ \max}}{[\tau]}; \tag{5.34}$$

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0{,}2 \cdot d^3. \tag{5.35}$$

Порівнявши вирази (5.34) та (5.35), знайдемо діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{Z\ \max}}{0{,}2 \cdot [\tau]}}. \tag{5.36}$$

Із виразу (5.30) маємо, що на ділянці вала - кут закручування $d\varphi$ дорівнює:

$$d\varphi = \frac{M_z}{G} \cdot \frac{dz}{I_\rho}, \tag{5.37}$$

Для всього вала:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{G} \cdot \frac{dz}{I_p}. \tag{5.38}$$

Для вала із сталим поперечним перерізом і однаковим значенням M_z:

$$\varphi = \frac{M_z}{G} \cdot \frac{l}{I_\rho}. \tag{5.39}$$

Для визначення характеристики жорсткості вала, вводиться поняття відносного кута закручування (θ):

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \tag{5.40}$$

Одиниця виміру *(рад/м)*.

3 Кручення стрижня прямокутного поперечного перерізу

Очевидно, що деформація вала прямокутного поперечного перерізу принципово відрізняється від деформації круглого вала, оскільки має місце переміщення точок вздовж вісі вала і порушення гіпотези плоских перерізів. Тобто поперечні перерізи викривляються (депланують) (рис. 5.21).

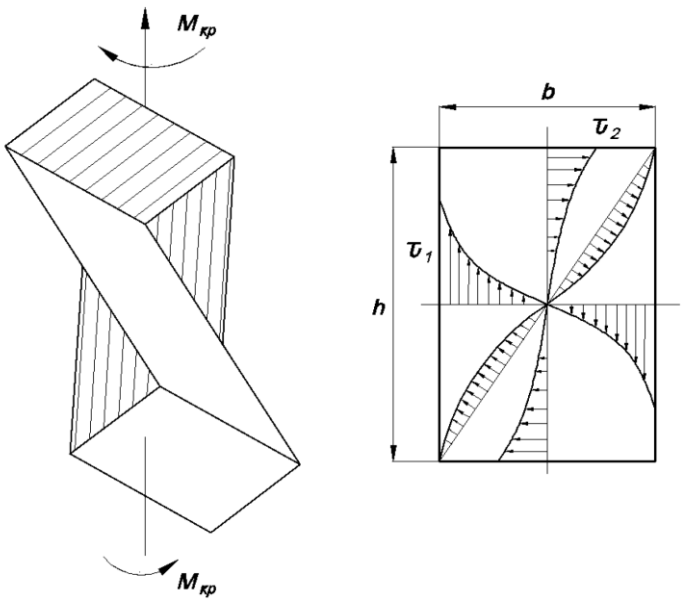


Рис. 5.21. Деформація вала прямокутного поперечного перерізу.

Наведемо кінцеві результати, які базуються лише на емпіричних даних і за яких епюри τ мають вигляд (рис. 5.21).

Очевидно, що τ_{max} виникають посередині довшої сторони прямокутника і визначаються:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{прям}}, \qquad (5.43)$$

Напруження в точці *2*:

$$\tau_2 = \varphi \cdot \tau_1, \qquad (5.44)$$

Кут закручування:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_\alpha}; \qquad (5.45)$$

де: $W_{прям} = \alpha \cdot h \cdot в^2$ – момент опору перерізу;

$I_\alpha = \beta \cdot h \cdot в^3$ – полярний момент інерції; перерізу вала.

Коефіцієнти $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma}$ залежать від геометричного співвідношення сторін валу *h* і *b* і приводяться в нормах.

Умова міцності та жорсткості для вала прямокутного поперечного перерізу має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot в^2} \le [\tau]. \quad (5.46)$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{G \cdot \beta \cdot h \cdot в^3} \le [\theta]. \quad (5.47)$$

Лекція 12. Плоский згин

План

1. Основні типи опорних в’язей. Визначення опорних реакцій
2. Внутрішні сили при згині. Диференційні залежності між MX , QY та q. Правила спрощеної побудови епюр MX та QY
3. Приклади побудови епюр M_x і Q_y

1. Плоский згин Основні типи опорних в’язей. Визначення опорних реакцій. Стрижні, які працюють в умовах згину називають балками. Якщо на бокову поверхню балки нанести прямокутник, то в результаті дії зовнішнього згинального моменту поперечні риски залишаються прямими, але при цьому повернуться на деякий кут, а поздовжні викривляться, змінивши свою довжину. Тобто верхні волокна скорочуються, а нижні подовжуються (рис. 6.1).

На практиці відомі такі основні випадки згину: а) чистий згин – коли в поперечному перерізі виникає тільки згинальний момент M_x (рис. 6.1 а). б) поперечний згин – коли в поперечному перерізі виникає згинальний моментM_x і поперечна сила Q_y (рис. 6.1 б). в) плоский згин – це коли поперечний переріз балки має вертикальну вісь симетрії і силова площина збігається з цією віссю.

Деформована вісь балки також лежить у цій площині (рис. 6.1 в). г) косий згин – коли силова площина не збігається з головною віссю (рис. 6.1 г).

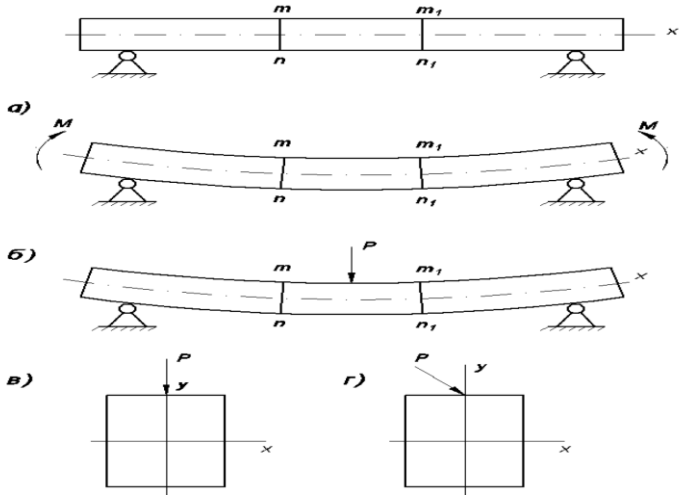


Рис. 6.1. Випадки згину.

Для того, щоб балка могла сприймати зовнішнє навантаження і передавати його на основу, вона повинна бути закріплена за допомогою опорних в’язей (опор). Існують три види опор (рис. 6.2):

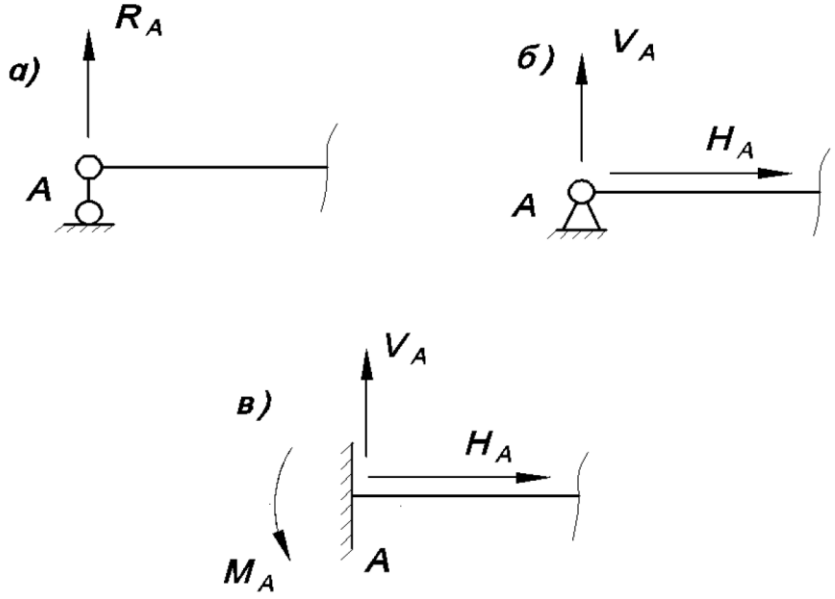


Рис. 6.2. Види опор: а) шарнірно рухома опора; б) шарнірно нерухома опора; г) жорстке затиснення (защемлення).

Відповідно до умов закріплення, виділяють такі основні види балок (рис. 6.3):

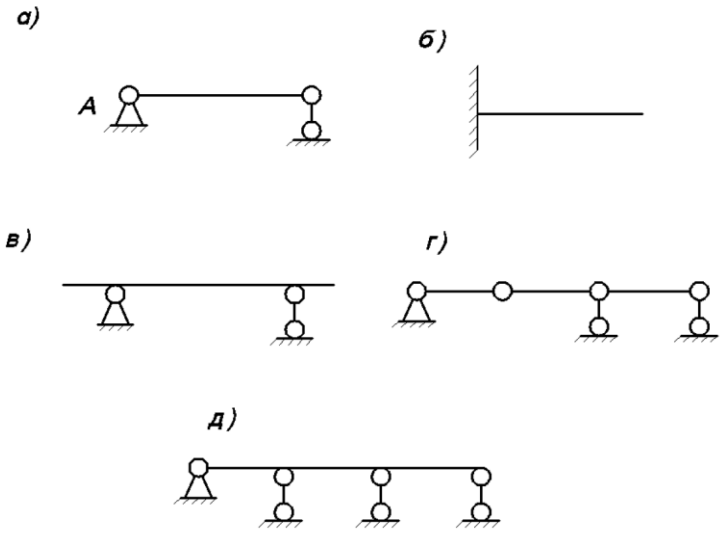


Рис. 6.3. Види балок: а) проста однопрогинна балка; б) консольна балка; в) двохопорна балка з консолями; г) розрізна багатопрогинна балка; д) нерозрізна багатопрогинна балка.

1.2. Внутрішні сили при згині. Диференційні залежності між M_X, Q_Y та q. Правила спрощеної побудови епюр M_X та Q_Y.

Для визначення внутрішніх зусиль при згині використовують метод перерізів, згідно з яким балку розтинають на дві частини і «працюють» з однією із них, а дію відкинутої частини замінюють внутрішніми зусиллями, які при згині зводять до поперечної сили Q_y і згинального моменту M_x (рис. 6.4).

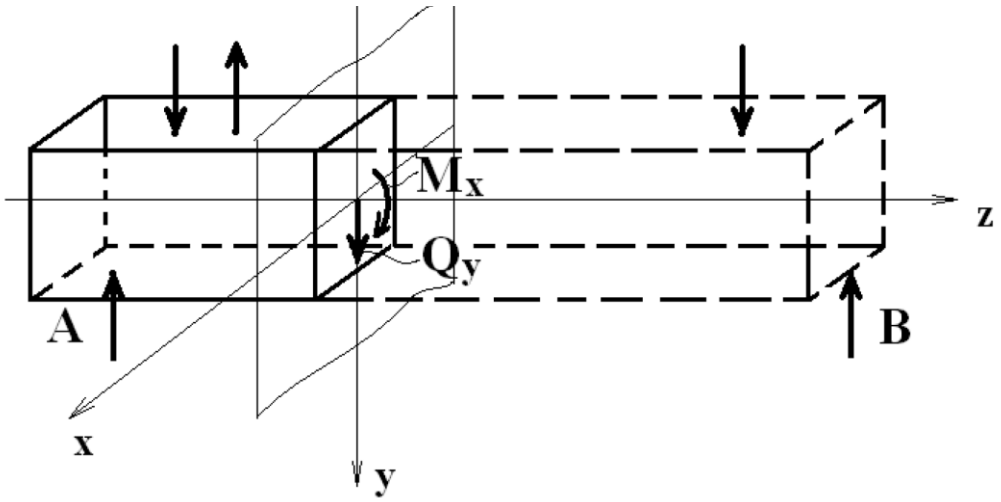


Рис. 6.4. Метод перерізів у графічному відображенні при визначенні Q_y і M_x.

Величина поперечної сили Q_y і згинального моменту M_x обчислюються за такими робочими правилами: – поперечна сила Q_y дорівнює сумі проекцій всіх зовнішніх сил на площину перерізу і обирається із знаком «+», якщо вона повертає відсічену частину відносно перерізу за годинниковою стрілкою, і навпаки; – згинальний момент M_x дорівнює сумі моментів зовнішніх зусиль відносно центру ваги перерізу і обирається із знаком «+», якщо розтягуються нижні волокна, і навпаки.

Розглянемо ділянку балки довжиною dz і завантажимо її зовнішнім розподіленим навантаженням інтенсивності q (Н/м). Дію розподіленого навантаження на ділянці довжиною l можна замінити зосередженою силою Q = q·l. Знайдемо внутрішні зусилля (рис. 6.5).

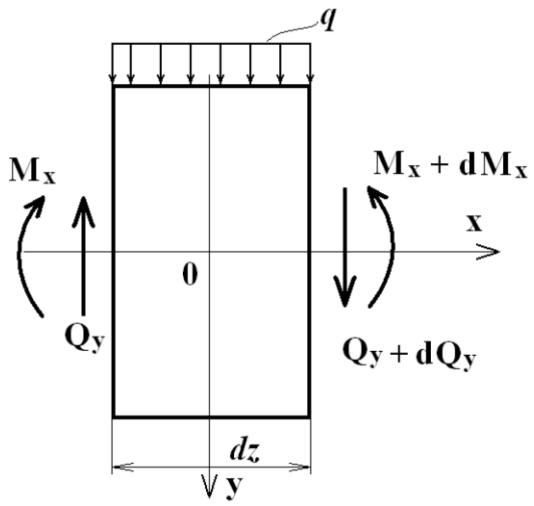


Рис. 6.5. Завантаження ділянки балки із зображенням внутрішніх зусиль.

Із умов рівноваги маємо:

1. $\sum y = 0$.

$$q \cdot dz - Q_y + (Q_y + dQ_y) = 0;$$

Звідси $$\frac{dQ_y}{dz} = -q. \qquad (6.1)$$

2. $\sum M_0 = 0$.

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot \frac{1}{2} dz + (Q + dQ_y) \cdot \frac{1}{2} \cdot dz = 0;$$

Величина $dQ_y \cdot \frac{1}{2} \cdot dz$ прямує до нуля, тому нею можна нехтувати.

Кінцево отримуємо:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y . \qquad (6.2)$$

Проаналізувавши вирази (6.1) та (6.2), можна отримати третю залежність:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q . \qquad (6.3)$$

Для того щоб розв'язувати задачі міцності та жорсткості при згині необхідно знати $M_x^{\max}$ та $Q_y^{\max}$ тобто виникає необхідність побудувати епюри M_x та Q_y , що будуються за допомогою правил спрощення побудови, які випливають із диференційної залежності між M_x , Q_y і q (6.2; 6.3).

Правила спрощення побудови епюр M_x та Q_y.

1.На ділянці балки, вільної від розподіленого навантаження ($q = 0$), поперечна сила постійна ($Q = const$) згинальний момент M_x змінюється за лінійним законом.

2. На ділянці балки, що завантажена рівномірно – розподіленим навантаженням ($q = const$): а) Q_y змінюється за лінійним законом; б) M_x змінюється за законом квадратної параболи.

3. На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ($q > 0$), поперечна сила Q_y зменшується із зростанням Z на величину рівнодіючої цієї ділянки.

4. На ділянці балки, де поперечна сила більша за нуль ($Q_y > 0$) із збільшенням Z, епюра M_x зростає на величину площі епюри Q_y цієї ділянки.

5. На ділянці балки, де поперечна сила Q_y змінюється за лінійним законом та в деякій точці дорівнює нулю, на епюрі згинального моменту M_x

у тій же точці будемо мати екстремальне значення згинального моменту, причому максимальне значення згинального моменту M_x буде тоді, коли Q_y змінюється з «+» на «–».

6. На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ($q > 0$), епюра M_x має випуклість у бік додатних координат.

7. У точках прикладання зовнішніх зосереджених сил на епюрі поперечних сил Q_y буде стрибок на величину цієї сили.

8. У точках прикладання зовнішніх зосереджених моментів згинання на епюрі згинальних моментів M_x буде стрибок на величину цього зовнішнього моменту.

Розв’язання задач з побудови епюр Q_y та M_x поділяють на 4 етапи:

1. Визначення опорних реакцій. Вважаючи балку абсолютно жорстким тілом, замінюючи опори відповідними реакціями і складаючи рівняння рівноваги, визначаємо їх. Обов’язково здійснювати контроль правильності знаходження опорних реакцій. 2. Розбивають балку на ділянки. Границями ділянок є: початок і кінець балки; точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження q та його закінчення. 3. Визначаємо величину поперечної сили Q_y в характерних перерізах і будуємо її епюру. 4. Визначаємо величини згинальних моментівM_x в характерних перерізах і будуємо його епюру.

1.3. Приклади побудови епюр М $_x$ ***і*** Q_y Приклади для правил спрощення побудови епюр (рис. 6.6 – 6.10):

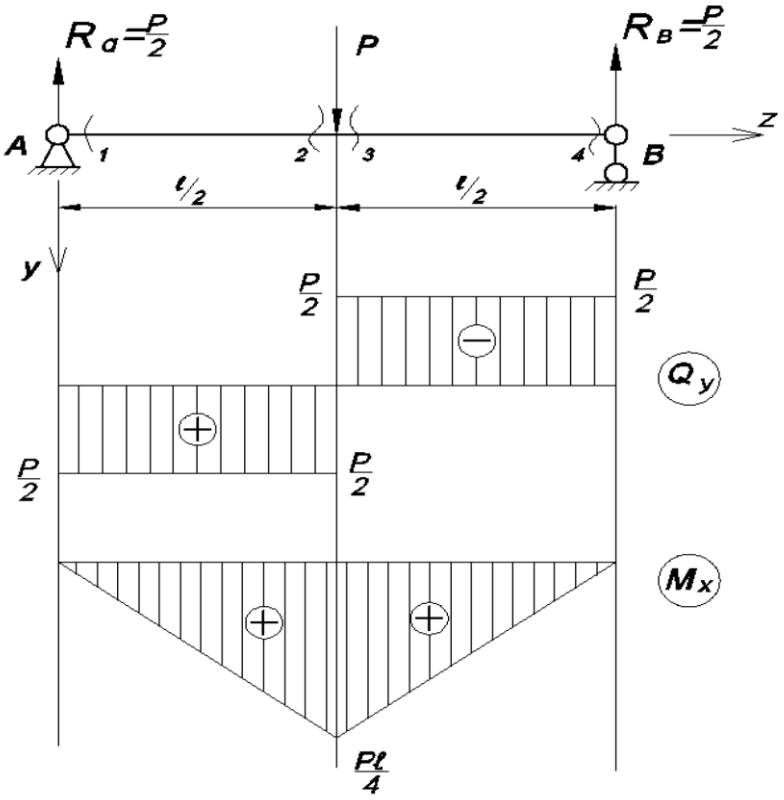


Рис. 6.6. Побудова епюрQ_y, M_x.

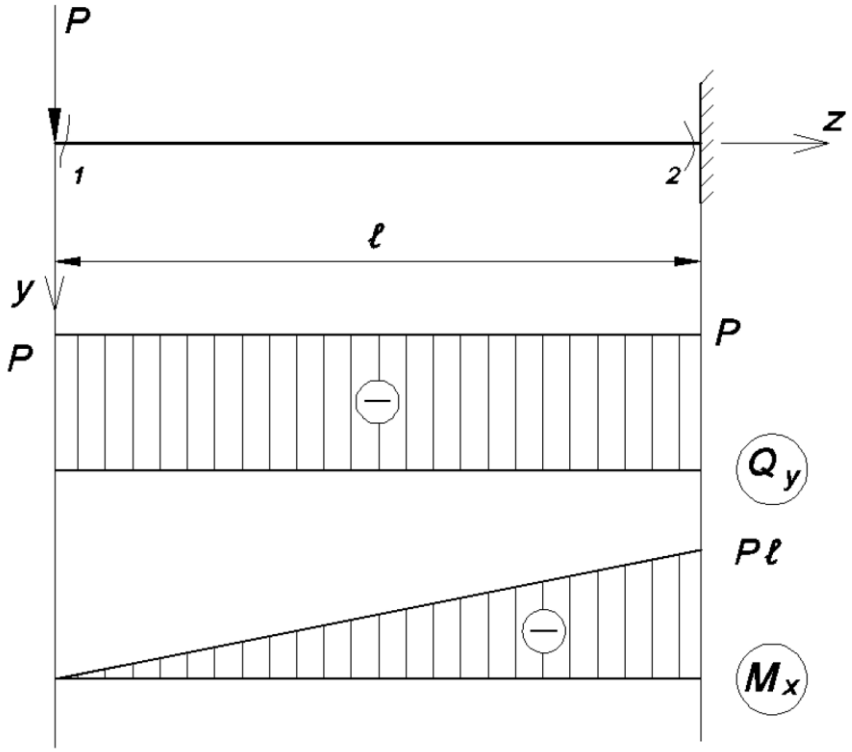


Рис. 6.7. Побудова епюр Q_y і M_x.

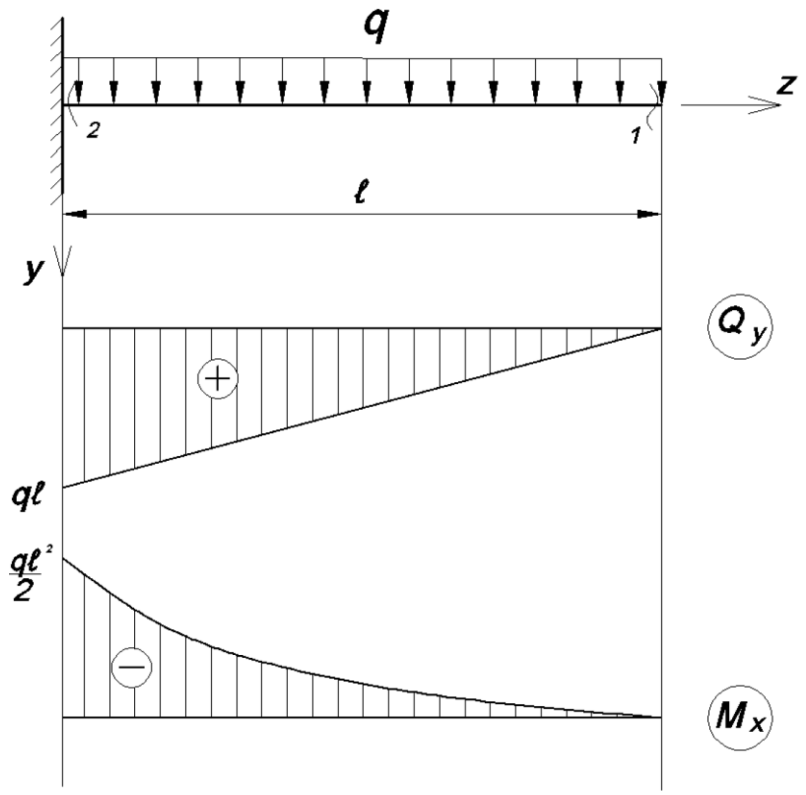


Рис. 6.8. Побудова епюрQ_y, M_x.

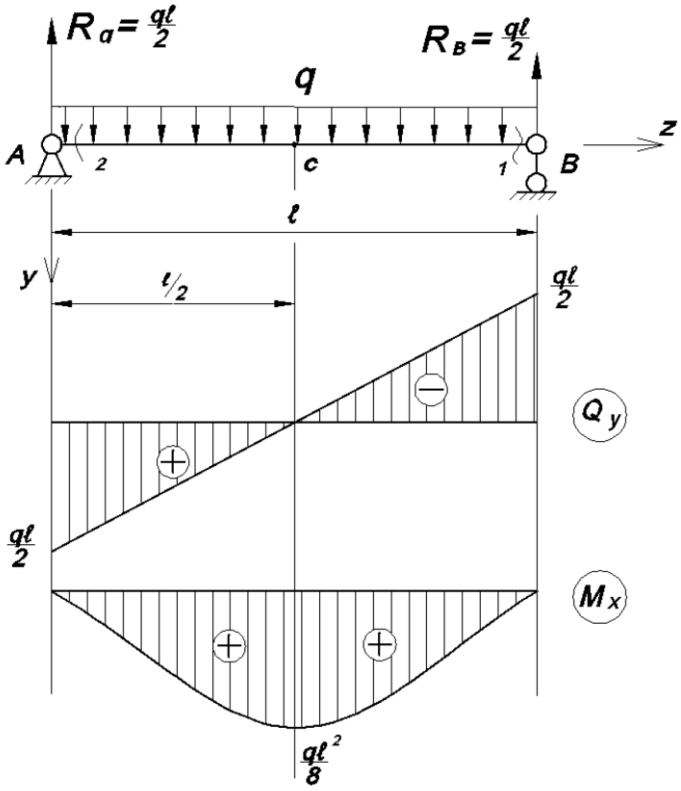


Рис. 6.9. Побудова епюр Q_y, M_x.

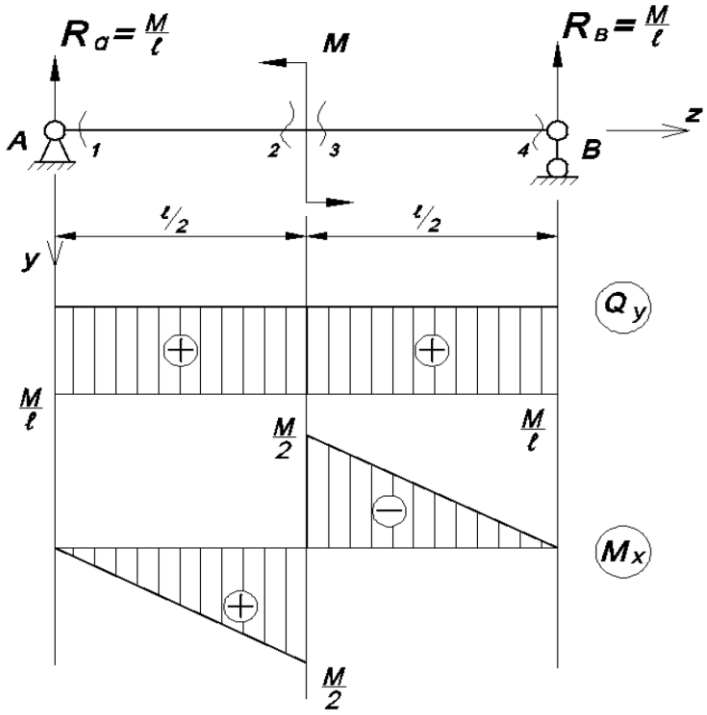


Рис. 6.10. Побудова епюр Q_y, M_x.

Лекція 13. Чистий згин

План

1. Загальні поняття про чистий згин
2. Визначення нормальних напружень при чистому згині
3. Приклад чистого згину

1. Загальні поняття про чистий згин У цілому при плоскому згині в поперечному перерізі балки виникають поперечна сила Q_y та згинальний момент M_x. Якщо в поперечному перерізі балки відсутня поперечна сила Q_y, а діє тільки згинальний момент M_x, то балка знаходиться в умовах чистого згину (рис. 6.12). Середня ділянка балки знаходиться в умовах чистого згину.

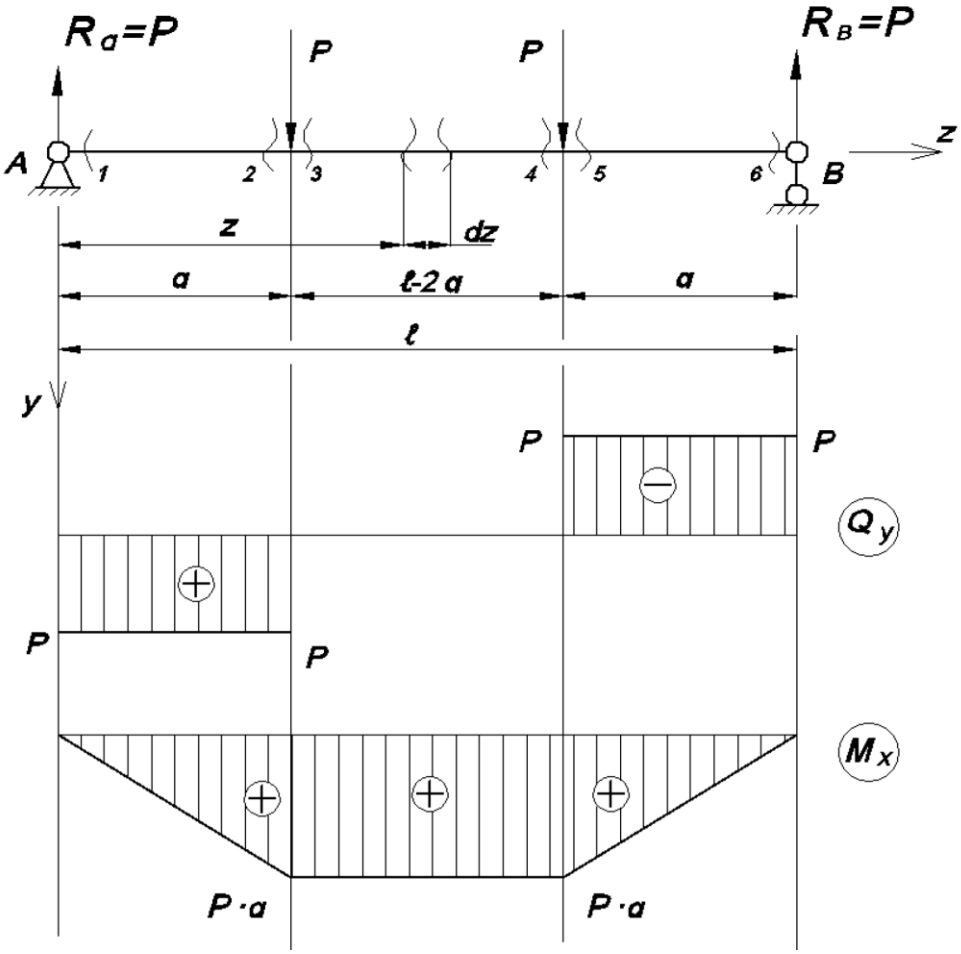


Рис. 6.12. Схема балки.

2. Визначення нормальних напружень при чистому згині Для спрощення розглянемо балку, яка має вертикальну вісь симетрії. При визначенні характеру (закону) розподілу напружень за поперечним перерізом балки недостатньо рівнянь статики.

Розглядають деформований стан балки із нанесеною на її бічну поверхню сіткою із поздовжніх і поперечних ліній (рис. 6.13).

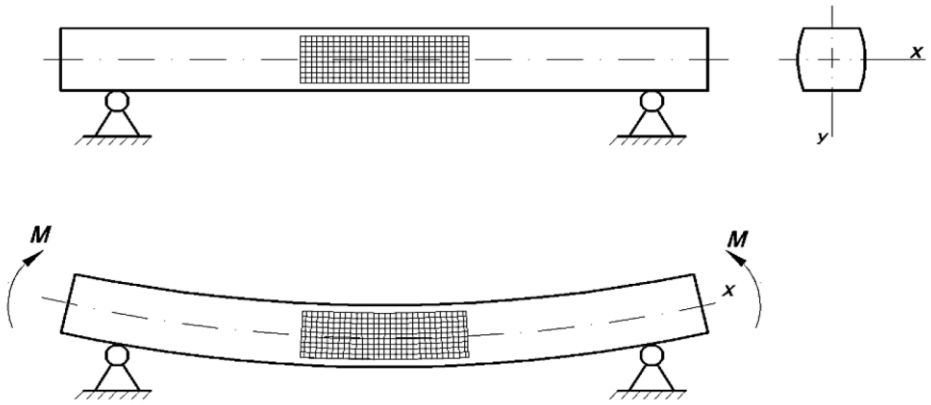


Рис. 6.13. Деформація волокон балки при чистому згині.

При деформації поздовжні риски викривляються і змінюють свою довжину, а поперечні повертаються на деякий кут, залишаючись при цьому прямими. Тобто при чистому згині справедливою є гіпотеза плоских перерізів, яка разом із рівняннями статики дає можливість визначити закон зміни напруження за поперечним перерізом балки. Розглянемо ділянку балки довжиною dz (рис. 6.13), та відтворимо його в збільшеному вигляді (рис. 6.14).

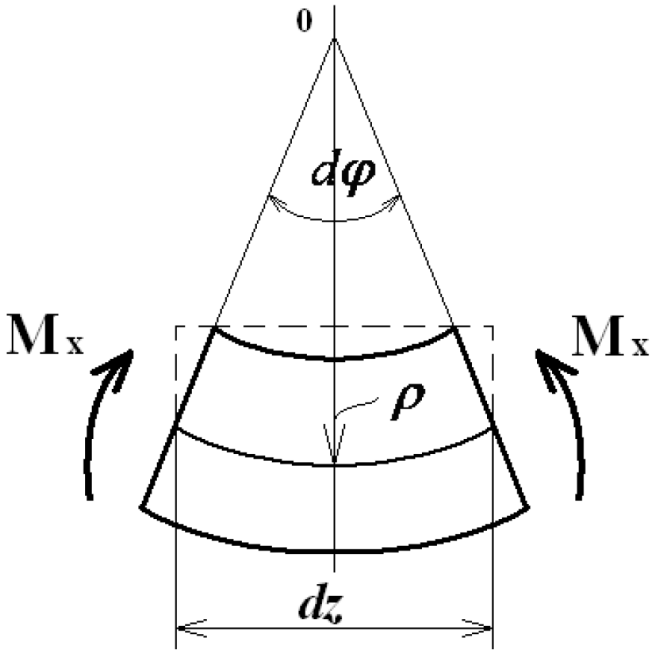


Рис. 6.14. Деформація ділянки балки довжиною dz.

За такої дії на ділянку балки dz зовнішнього навантаження видно, що два суміжних перерізи повертаються на кут $d\varphi$. При цьому верхні волокна скорочуються, а нижні – подовжуються. Деяке волокно залишається недеформованим – нейтральна лінія. А це, в свою чергу, говорить про те, що в поперечному перерізі виникають тільки нормальні напруження σ.

Для простоти розглянемо ділянку балки з прямими поздовжніми волокнами (рис. 6.15). Розглядатимемо деформацію волокна на відстані y від нульової лінії, яка складається з двох відрізків АВ, кожен з яких дорівнює:

$$AB = y \cdot \frac{d\varphi}{2}. \tag{6.4}$$

$$dz = \rho \cdot d\varphi. \tag{6.5}$$

$$\Delta dz = y \cdot d\varphi. \tag{6.6}$$

де: ρ – радіус кривизни.

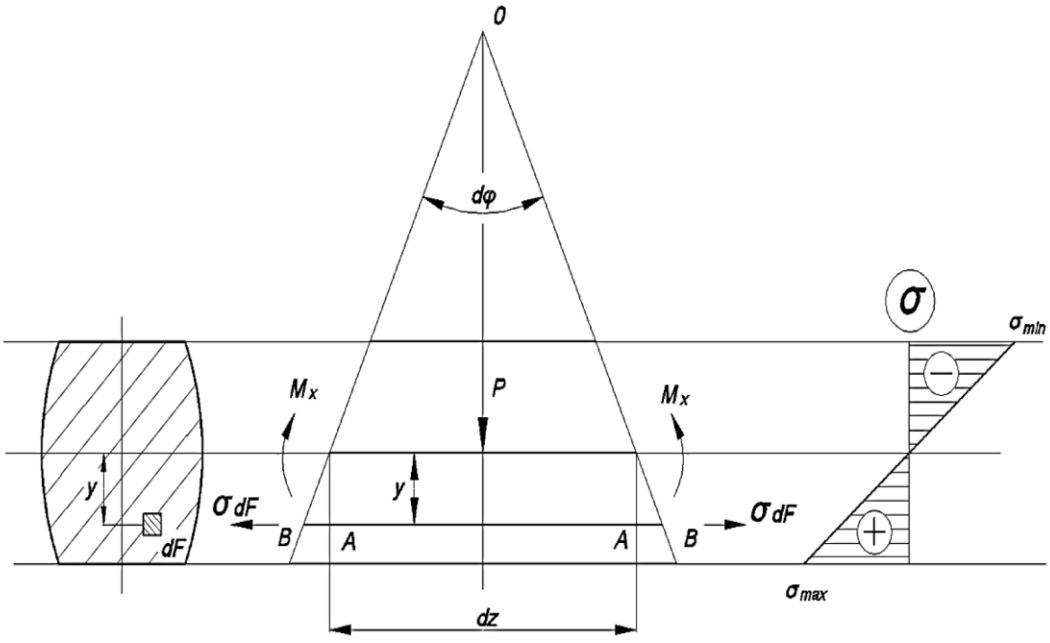


Рис. 6.15. Наближений розгляд деформації волокон.

Відносна деформація дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{1}{\rho} \cdot y \,. \tag{6.7}$$

Використовуючи закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \text{ : маємо } \sigma = \frac{E}{\rho} \cdot y \tag{6.8}$$

Очевидно, що поздовжня сила при чистому згинанні дорівнює нулю:

$$N_Z = \int_F \sigma \cdot dF = 0 \,. \tag{6.9}$$

Підставивши вираз (6.8) в (6.9) будемо мати:

$$N_Z = \int_F \frac{E}{\rho} y \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot dF = 0 \,. \tag{6.10}$$

При цьому $\frac{E}{\rho} \neq 0$.

Відповідно:

$$\int_F y \cdot dF = S_x = 0. \tag{6.11}$$

Це означає, що при чистому згині нейтральна лінія проходить через центр ваги перерізу.

Сумарний згинальний момент у поперечному перерізі балки ^{M_x} відносно нейтральної вісі визначається:

$$M_x = \int_F (\sigma dF) \cdot y \tag{6.12}$$

Замість σ підставимо його значення із (6.8), й отримаємо:

$$M_x = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF \tag{6.13}$$

Враховуючи, що $\int_F y^2 dF = I_X$, маємо:

$$M_x = \frac{EI_x}{\rho}, \qquad (6.14)$$

Порівнявши (6.14) з (6.8), отримаємо:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y. \qquad (6.15)$$

Із виразу (6.15) видно, що змінною є тільки ордината *i*, а значить нормальні напруження по висоті перерізу змінюються за лінійним законом. Графічне відображення закону зміни нормальних напружень *y* по висоті перерізу називають епюрою нормальних напружень (рис. 6.15). Очевидно, що максимальні напруження виникають у найбільш віддалених волокнах і визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{\underbrace{I_x / y_{\max}}_{W_x}} = \frac{M_x}{W_x}. \qquad (6.16)$$

Формула (6.16) виведена для перерізів, що мають вертикальну вісь симетрії. Доведемо, що вона є справедливою і для будь-яких поперечних перерізів, але при цьому силова площина повинна збігати з однією із головних осей симетрії. Очевидно, що загальний вид епюри σ не залежить від форми поперечного перерізу балки.

Для доведення прирівняємо до нуля згинальний момент M_y:

$$M_y = \int_F \sigma \cdot dF \cdot x = \int_F \frac{E}{\rho} \cdot y \cdot dF \cdot x = \frac{E}{\rho} \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF = 0. \quad (6.17),$$

При цьому $\frac{E}{\rho} \neq 0$.

Значить: $\int_F x \cdot y \cdot dF = I_{xy} = 0$ – відцентровий момент інерції.

Відцентровий момент інерції дорівнює нулю лише тоді коли ці осі будуть головними.

3. Приклад чистого згину

Для найбільш напруженого поперечного перерізу (рис. 6.11) балки необхідно побудувати епюру σ, прийнявши *в* = 15 см, *h* = 24 см. Максимальний момент $M_{x\,(7\text{-}7)}$ =207,5 кН-м. (рис.6.11).

Для точки 1.

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y = \frac{207{,}5 \cdot (-0{,}12)}{0{,}15 \cdot (0{,}24)^3 / 12} = -144 \text{ МПа}$$

Для точки 2.

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y = \frac{207{,}5 \cdot (-0{,}06)}{0{,}15 \cdot (0{,}24)^3 / 12} = -72 \text{ МПа}$$

Для точки 3: $\sigma_{(3)} = 0$.

За аналогією для точок 4 і 5 маємо: $\sigma_{(4)}$ = 72 МПа. $\sigma_{(5)}$ =144 МПа.

Переріз 7–7

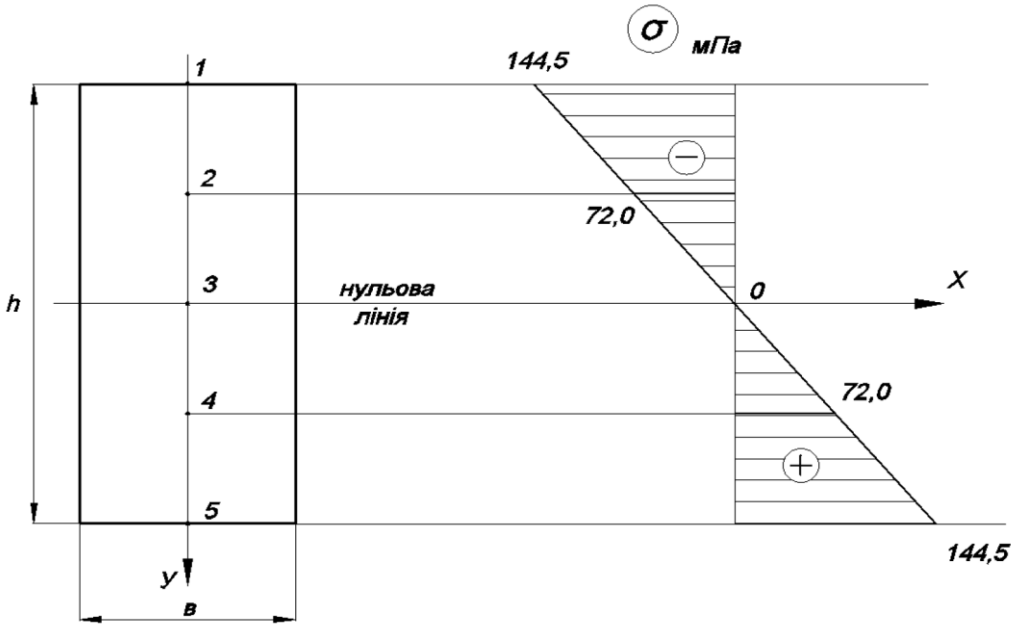


Рис. 6.16. Побудова епюри нормальних напружень при чистому згині.

Лекція 14. Поперечний згин

План

1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Епюра дотичних напружень при поперечному згині

2. Поняття про центр згину

1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Епюра дотичних напружень при поперечному згині

На відміну від чистого згину, при поперечному згині в перерізі балки поряд з моментом згинання M_x виникає поперечна сила Q_y (рис. 1).

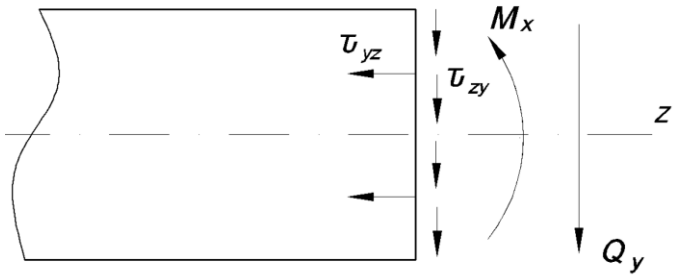


Рис. 1. Дотичні напруження при поперечному згині.

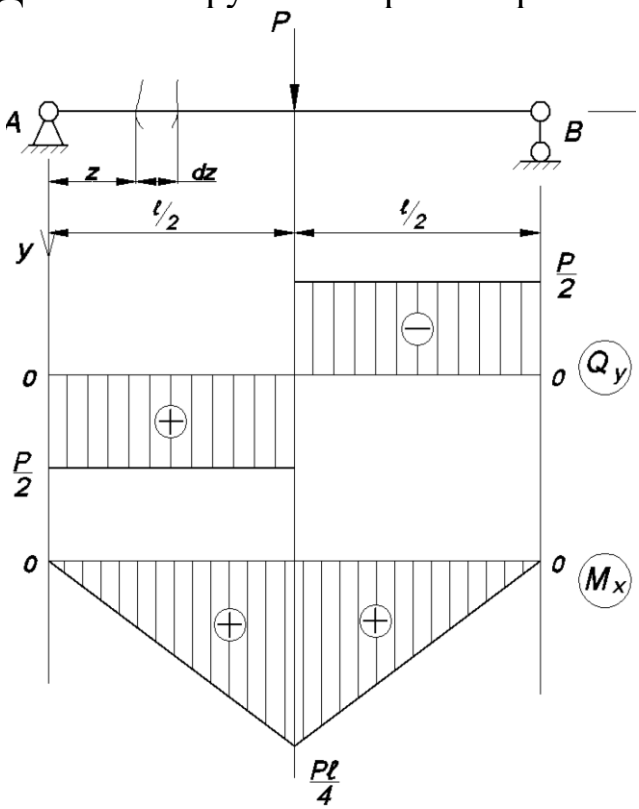


Рис. 2. Схема балки.

Поперечна сила Q_y викликає дію дотичних напружень τ у поперечному перерізі, які згідно із законом парності дотичних напружень виникають і в поздовжніх перерізах, викликаючи зсув поздовжніх волокон і порушуючи гіпотезу плоских перерізів, що покладена в основу виведення формули

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

Експериментальні й теоретичні дослідження цього питання довели, що зсув незначно впливає на порушення гіпотези плоских перерізів, тому для поперечного згину користуються формулою:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

як і для чистого згину.

Розглянемо ділянку балки (рис. 2) довжиною dz , яку розітнемо поздовжнім перерізом і розглянемо рівновагу залишеної частини (рис. 3).

Поперечний переріз балки

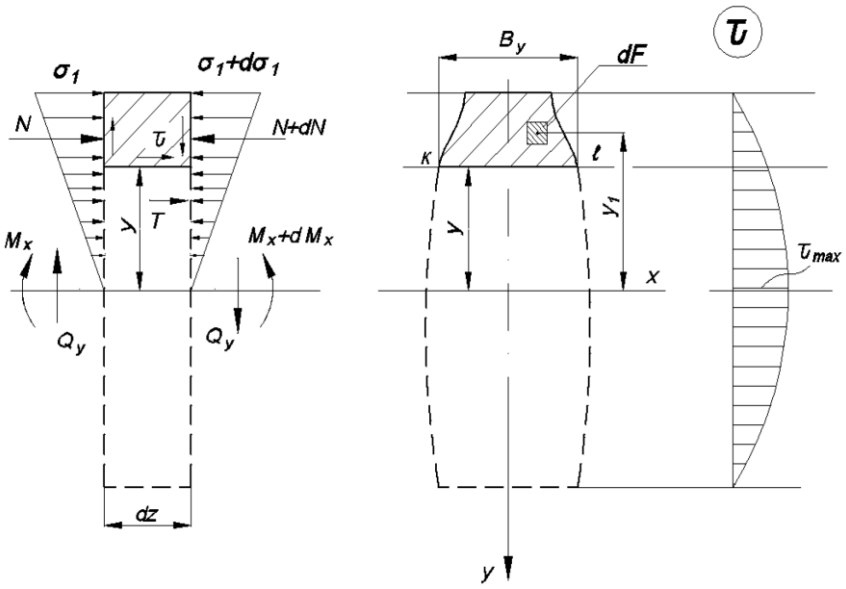


Рис. 3. Ділянка балки довжиною dz .

Оскільки на правому перерізі ділянки балки діє більший згинальний момент, ніж на лівому, то відповідно будуть більшими і напруження:

$$d\sigma_1 = \frac{dM_x}{I_x} \cdot y_1 \,. \tag{6.18}$$

Відповідно, і стискаюча сила на правому перерізі буде більшою, ніж на лівому на величину:

$$dN_Z = \int_{F_{відсіч}} d\sigma_1 \cdot dF = \int_{F_{відсіч}} \frac{dM_x}{I_x} y_1 \cdot dF =$$

$$= \frac{dM_x}{I_x} \int_{F_{відсіч}} y_1 \cdot dF. \tag{6.19}$$

$$S_x^{відсіч} = \int_{F_{відсіч}} y_1 \cdot dF \tag{6.20}$$

де $S^{відсіч}_{x}$- статичний момент відносно нейтральної осі відсіченої частини перерізу.

З врахуванням виразу (6.20) формула (6.19) набуде вигляду:

$$dN_Z = \frac{dM_x}{I_x} \cdot S_x^{відсіч} \,. \tag{6.21}$$

Сила зсуву в поздовжньому перерізі визначається:

$$T = \tau \cdot dz \cdot в_y \tag{6.22}$$

Із умов рівноваги очевидно, що сума проекцій усіх сил на вісь ***z*** рівна нулю, отже, матимемо:

$$T = dN \tag{6.23}$$

Підставивши (6.21) та (6.22) в (6.23), матимемо рівність:

$$\tau_x = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^{відсіч}}{I_x \cdot в_y}. \qquad (6.24)$$

А так як $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ та $\tau_x = \tau_y$, матимемо:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot в_y}, \qquad (6.25)$$

де I_x – момент інерції відносно нейтральної осі всього поперечного перерізу.

Формулу (6.25) отримав Д.І. Журавський.

Із аналізу формули (6.25) зрозуміло, що $\tau = 0$ у крайніх точках, а τ_{max} буде в точках, розташованих на нульовій лінії. τ_y змінюється, як відношення $S_{хвідсіч} / в_y$.

Для прямокутного перерізу, де $в_y = const$ то τ_y по висоті перерізу змінюється по кривій 3–го ступеню.

Побудуємо епюри τ для деяких перерізів. Прямокутний переріз (рис. 4).

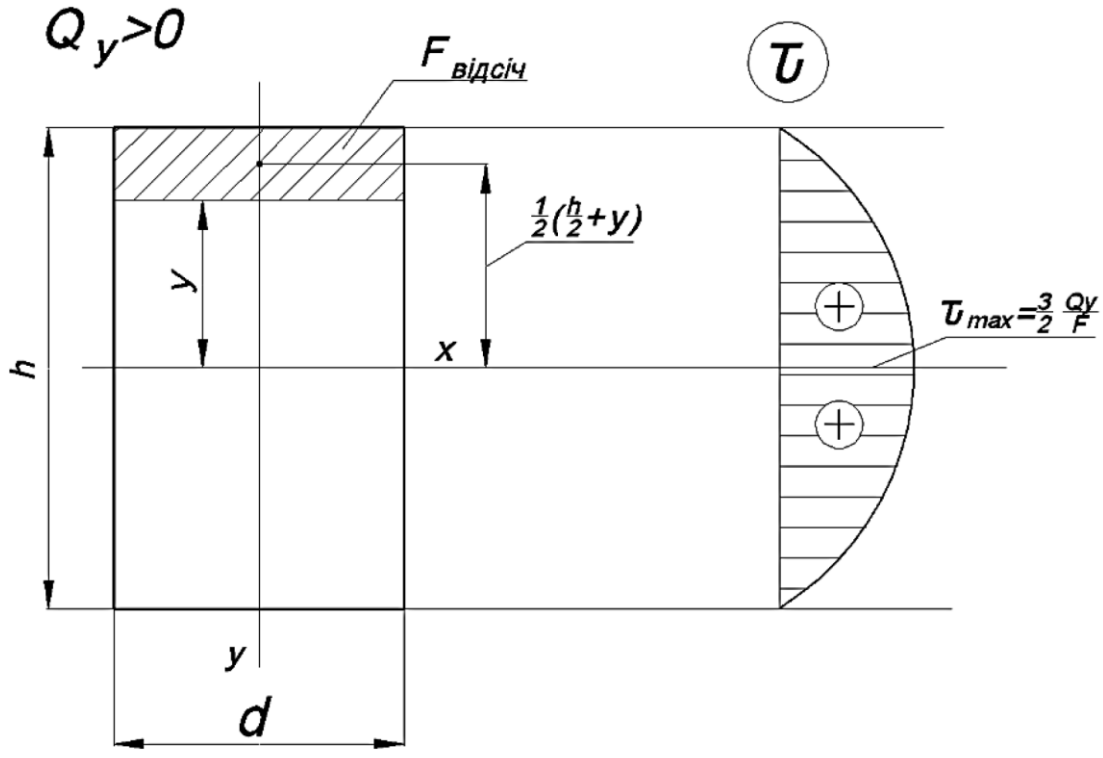


Рис. 4. Дотичні напруження в прямокутному поперечному перерізі.

$$в = 2 \cdot r \cdot \cos\varphi; \qquad y = r \cdot \sin\varphi; \qquad dy = r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_x^{відсіч} = \int_F y \cdot dF;$$

$$dF = в \cdot dy = 2 \cdot r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_x^{відсіч} = \int_F y \cdot dF = \int_F^{II} 2 \cdot r^3 \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = \frac{2 \cdot r^3}{3} \qquad (6.30)$$

Коли $y = r$ або $y = -r$, то $\tau_y = 0$.

При $y = 0$, використавши формулу (6.25) і використовуючи формулу для моменту інерції круга Ix= $\pi \cdot 4/4$ будемо мати формулу для обчислення дотичних напружень:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot 2 \cdot r^3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot r^4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{\pi \cdot r^2}.$$

$$\tau_y = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{F} \qquad (6.31)$$

де $F = \pi \cdot r^2$

Двотавровий переріз (рис. 5) характерний різкою зміною ширини в місцях з’єднання полиці та стійки.

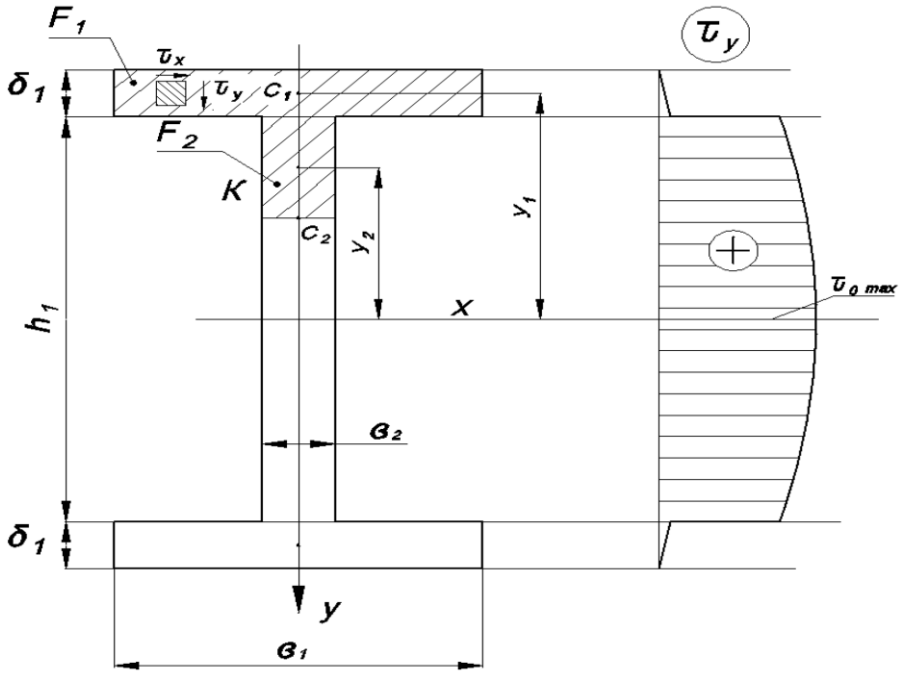


Рис. 5. Дотичні напруження двотаврового перерізу.

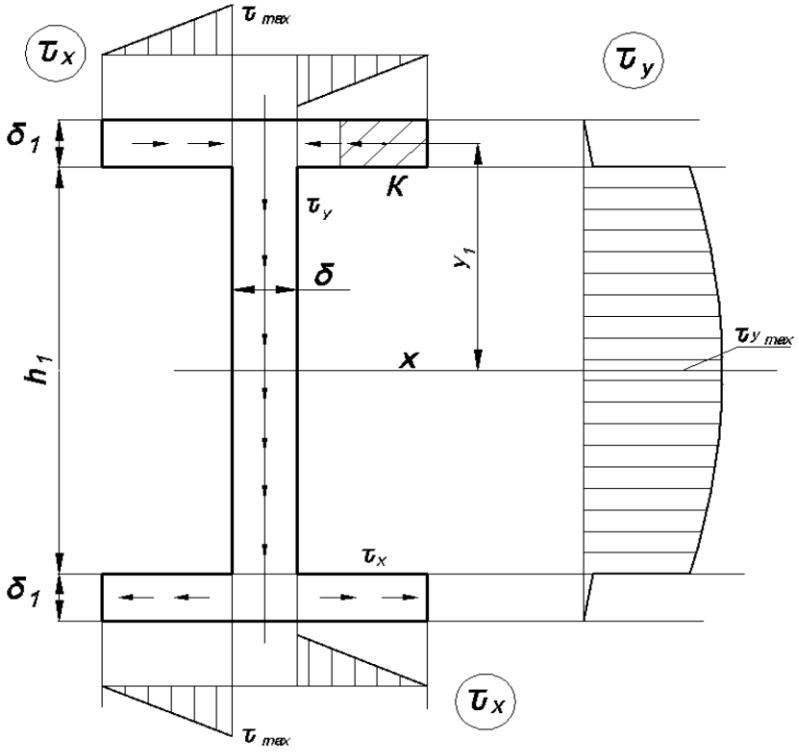


Рис. 6. Дотичні напруження τ_x та τ_y.

Для точки $S_x^{\text{відсіч}} = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2$;

Через значну ширину полиці τ_y розподіляється нерівномірно, тому для полиці користуватися формулою (6.31) не коректно, її застосовують лише, коли

$$y \le \pm \frac{h}{2}.$$

Тому в цьому разі роблять двояко: 1. Не враховують τ_y в полицях (через незначність);

2. Обчислюють за формулою:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot в_1},$$

У двотавровому перерізі в полиці також виникають напруження τ_x, які визначаються за формулою:

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot \delta_1}. \qquad (6.32)$$

$$S_x^{відсіч} = F^{відсіч} \cdot y_1.$$

2. Поняття про центр згину

Використовуючи методику побудови епюр τ_x та τ_y для двотавра, побудуємо їх для швелера, завантаженого в центрі ваги зосередженою силою на кінці консолі (рис. 7).

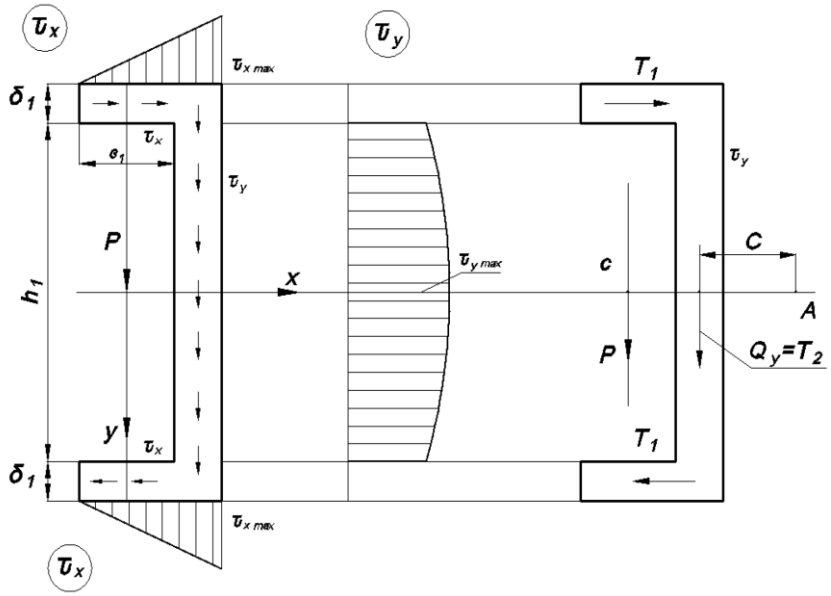


Рис. 7. Дотичні напруження в швелері.

Найбільш дотичні напруження в полиці швелера дорівнюють:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot \delta_1};$$

(6.33)

де: $S_x^{відсіч} = \frac{\delta_1 \cdot h_1 \cdot в_1}{2}$. (6.34)

Підставивши вираз (6.34) в (6.33), отримаємо:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot в_1 \cdot \delta_1 \frac{h}{2}}{I_x \delta_1} = \frac{Q_y}{2I_x} b_1 h_1.$$ (6.35)

Сумарна горизонтальна сила зсуву T_1 дорівнює:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \tau_x^{\max} \cdot \delta_1 \cdot в_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1 \cdot в_1^2.$$ (6.36)

Дві сили T_1 призводять до виникнення моменту, який визначають:

$$M_1 = T_1 \cdot h_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1^2 \cdot в_1^2.$$ (6.37)

Звідси очевидно, що поряд із згином відбувається і закручування поперечного перерізу, що знижує міцність. Очевидно, що на осі X є така точка А, відносно якої момент закручування дорівнює нулю. Цю точку називають ***центром згину***. Відповідно, необхідно намагатися прикладати зосереджену силу в цій точці, яка визначається:

$$\sum M_A = 0;\ M_1 - Q_y \cdot c = 0.$$

$$c = \frac{M_1}{Q_y} = \frac{\delta_1 \cdot h_1^2 \cdot в_1^2}{4I_x}.$$ (6.38)

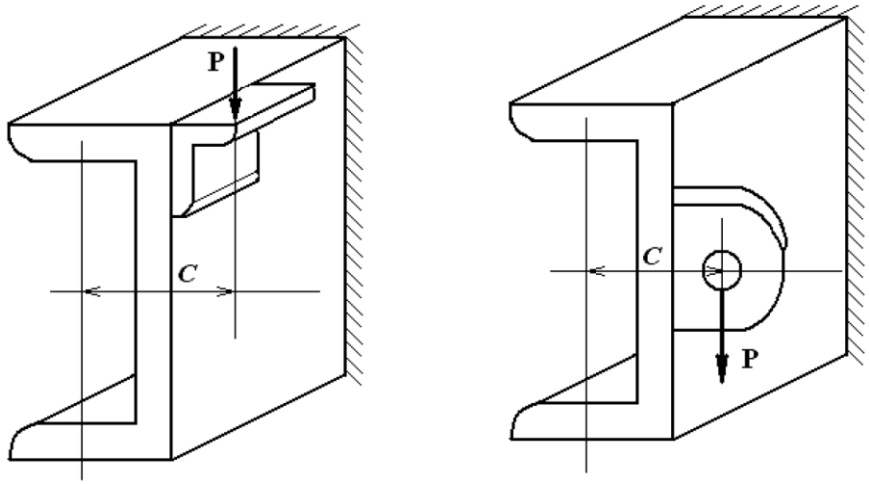


Рис. 8. Способи прикладання зовнішньої сили.

Для запобігання виникнення додаткових зусиль у поперечному перерізі зовнішню силу необхідно докладати в центрі згину.

Конструктивно вирішене питання зображено на рис. 8.

Лекція 15. Міцність балок при згині

План

4. Аналіз напруженого стану при згині
5. Перевірка міцності балок при згині

1. Аналіз напруженого стану при згині

У загальному випадку плоского поперечного згину в поперечному перерізі балки виникають нормальні та дотичні напруження, які визначаються за формулами:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y; \qquad \tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{відс.}}{I_x \cdot в_y}.$$

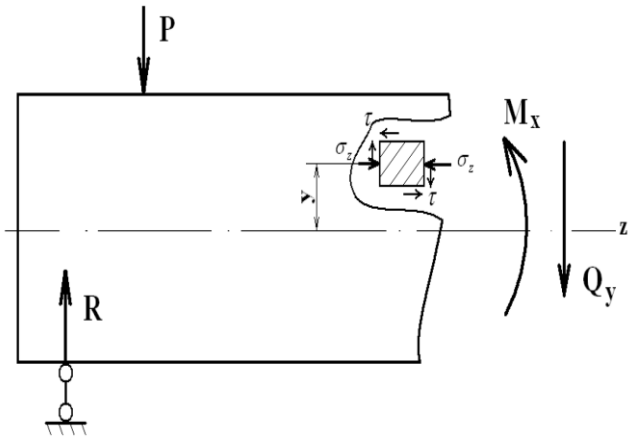


Рис. 1. Загальний випадок плоского напруженого стану при згині.

При цьому в будь–якій точці має місце плоский напружений стан, для якого головні напруження і головні площадки визначаємо за формулами (рис. 1):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z + \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}\ ; \qquad (6.39)$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}\ . \qquad (6.40)$$

У нашому випадку, враховуючи, що поздовжні волокна не тиснуть одне на одне $\sigma y = 0$ і $\sigma z = \sigma$, $\tau zy = \tau yz = \tau$ то формули будуть такими:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma}.$$

При цьому дослідимо напружений стан у трьох точках по висоті перерізу балки; у верхньому стиснутому волокні; у нижньому розтягнутому волокні; на нейтральній лінії (рис. 2).

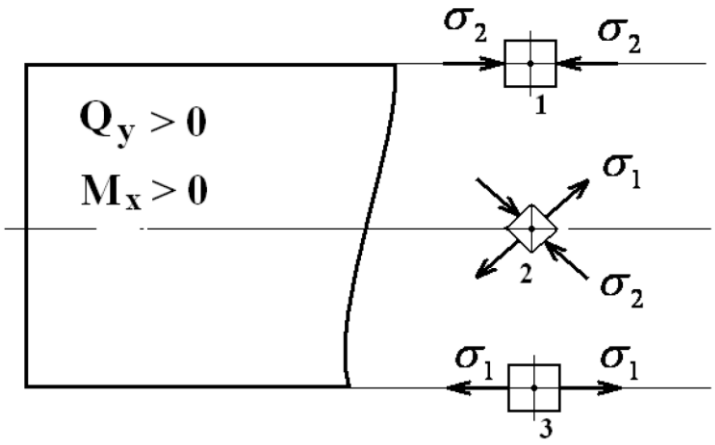


Рис. 2. Дослідження напруженого стану по висоті перерізу.

Точка 1: $\tau = 0$; $\sigma_z = -\sigma$.

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(-\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = 0;$$

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(-\sigma)^2} = -\sigma;$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{-\sigma} = 0; \Rightarrow \alpha_0' = 90°; \qquad \alpha_0'' = 0°.$$

Точка 2: $\tau = \tau_{\max}$; $\sigma_z = 0$.

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = \tau_{\max};$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = -\tau_{\max};$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{\max}}{0} = \infty; \Rightarrow \alpha_0' = 45°; \qquad \alpha_0'' = 135°.$$

Точка 3: $\tau = 0$; $\sigma_z = \sigma$.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = \sigma;$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2} = 0;$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{-\sigma} = 0; \Rightarrow \alpha_0' = 0°; \qquad \alpha_0'' = 90°.$$

При цьому максимальні та мінімальні дотичні напруження виникають у площинах нахилених до головних площин під кутом 45° і визначаються за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad . \tag{6.43}$$

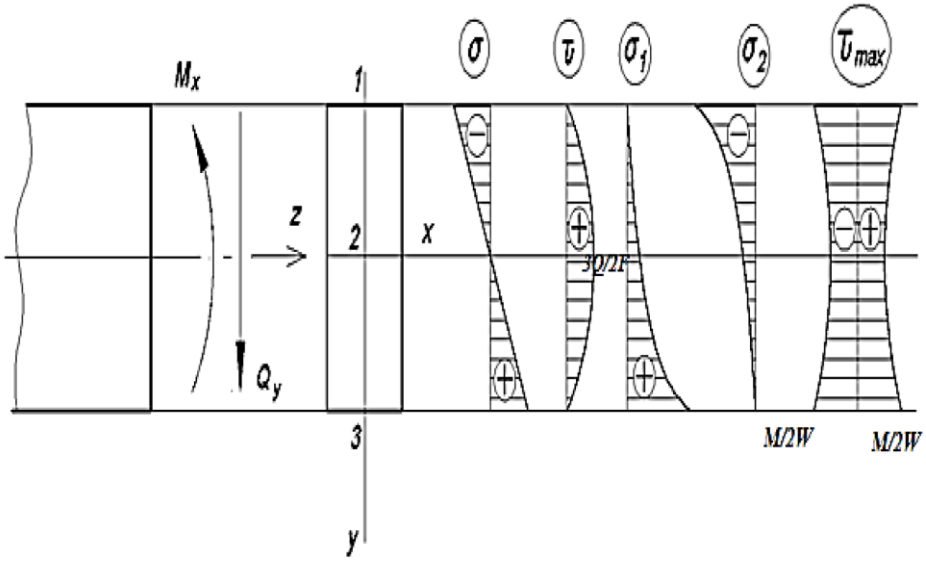


Рис. 3. Епюри напружень у прямокутному поперечному перерізі.

Таким чином, знаючи величину поперечної сили Q_y та згинального моменту M_x в поперечному перерізі, а також розміри поперечного перерізу, використавши формули (6.41; 6.42) та (6.43), побудуємо для прямокутного поперечному перерізу епюри нормальних σ, дотичних τ, головних нормальних σ_1, σ_2 та максимальних дотичних τ_{max} напружень, які виникають площинах, нахилених до головних під кутом 45º (рис. 3).

Зробимо аналогічні побудови також для балки двотаврового поперечного перерізу (рис. 4).

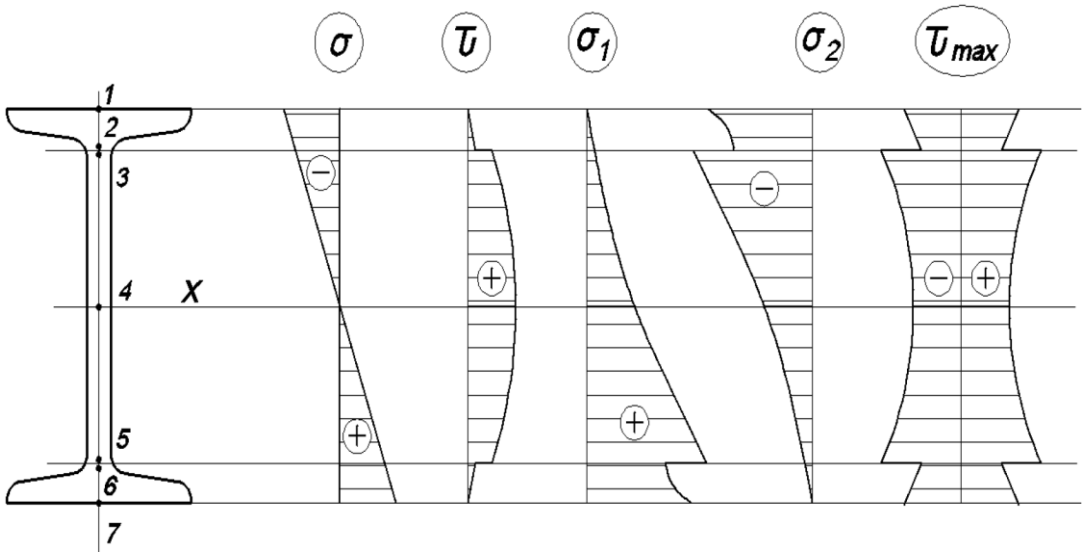


Рис. 3. Напруження в двотавровому поперечному перерізі.

Характерною особливістю при цьому є стрибки на епюрах σ_1, σ_2 та $\tau_{\max}$, викликані стрибками на епюрі τ, які в свою чергу, пов'язані із різкою зміною ширини перерізу в місцях з'єднання полиці зі стінкою.

2. Перевірка міцності балок при згині

Очевидно, що максимальні нормальні напруження М виникають у крайніх волокнах, і не враховуючи знаку визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_x}{W_x} . \qquad (6.44)$$

де: W_x – момент опору, що характеризує опір поперечного перерізу.

При цьому знаючи максимальний згинальний момент M_x, а також розмір поперечного перерізу, можна перевірити умову міцності балки за нормальними напруженнями. Вона має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma] . \qquad (6.45)$$

Із виразу (6.45) можна розв'язати і зворотну задачу, тобто при заданому навантаженні і знаючи матеріал, визначити розміри поперечного перерізу:

$$W_x = \frac{M_x}{[\sigma]} . \qquad (6.46)$$

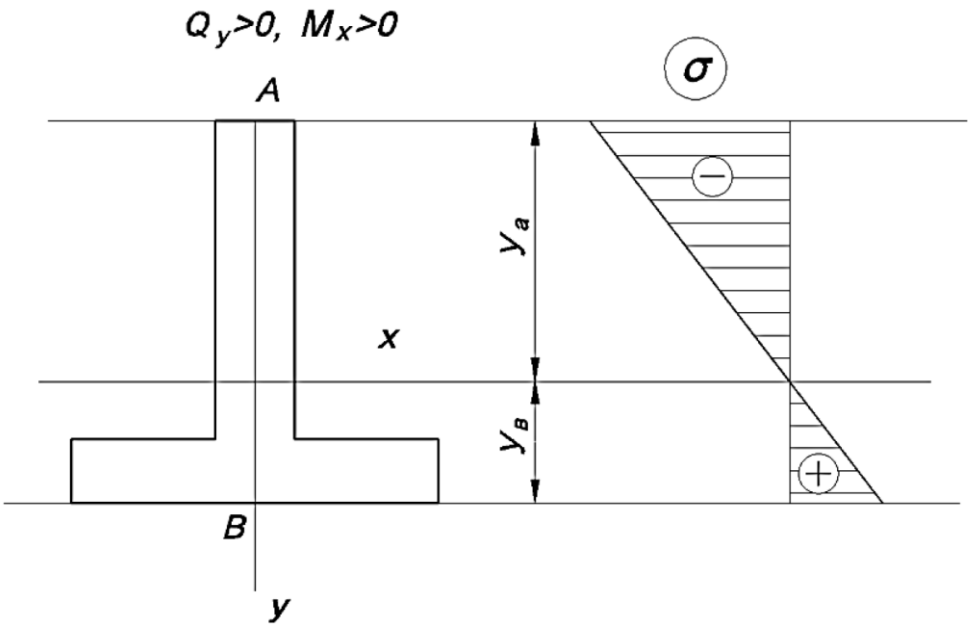


Рис. 5. Переріз, що не має горизонтальної вісі симетрії.

Для перерізу, який не має горизонтальної вісі симетрії, виразом (6.46) можна користуватися лише для найбільш віддалених волокон (рис. 6.29). При цьому, якщо балку виготовлено із крихкого матеріалу, то перевіряють умови міцності як на стиск, так і розтяг:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A \le [\sigma]_{стиск}; \qquad (6.47)$$

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B \le [\sigma]_{розтяг}. \qquad (6.48)$$

Для балки двотаврового поперечного перерізу виконують перевірку умов міцності (рис. 5): для точки 1 перевіряють умову міцності нормальними напруженнях (формула 6.25); для точки 4 перевірку міцності здійснюють за дотичними напруженнями (формула Журавського 6.25); для точок з‘єднання полиці і стійки (але належить стійці (точка 3)) перевіряють міцність за головними нормальними напруженнями:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \qquad (6.49)$$

або для цих точок виконують перевірку міцності, за 4 енергетичною теорією міцності, тобто:

$$\sigma_{еквівал}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \qquad (6.50)$$

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

курсу лекцій з дисципліни

„Теоретична механіка та механіка матеріалів і конструкцій"

«Бакалавр» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної та заочної форм навчання

Кафедра технічного сервісу

Укладач: Бондарев Сергій Григорович.

Редактор

Відповідальний за випуск: Бондарев С.Г.

Суми, РВВ, Сумський національний аграрний університет, вул. Кірова, 160

Підписано до друку; 2023 р. Формат А5: Гарнітура Arial
Тираж 100 примірників.
Умовних друкованих аркушів. Замовлення Ум. друк. арк. 4,5