

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**СУМСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Кафедра технічного сервісу**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання самостійних робіт**

**у двох частинах (ч. 1 та ч. 2)**

**«Теоретична механіка  
та механіка матеріалів і конструкцій»  
(Мех. 1, Мех. 1 с.т., 3Мех )**

**для студентів ОС «Бакалавр» спеціальності  
208 «Агроінженерія»  
денної та заочної форм навчання**

**УДК 001.891:656.13**

**Укладач:** Бондарев С.Г., к.т.н., доцент, кафедри технічного сервісу.

Методичні вказівки повного курсу самостійних робіт з дисципліни «Теоретична механіка та механіка матеріалів і конструкцій» у двох частинах, для студентів 1 курсу. ОС «Бакалавр» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної та заочної форм навчання. - Суми, 2023. – 57 с.

В методичних вказівках представлено методологію розв'язання типових задач по розділам в межах програми затвердженої методичним відділом університету, запропоновані задачі для самостійного розв'язання згідно варіантів в межах групи.

Рецензенти:

Тарельник В.Б. д.т.н., проф., завідувач кафедри “Технічний сервіс”

Зубко В.М. д.т.н., проф., завідувач кафедри тракторів, с.-г. машин та транспортних технологій.

Відповідальний за випуск: Бондарев С.Г., доцент кафедри “Технічний сервіс”.

Рекомендовано до друку Методичною радою інженерно-технологічного факультету СНАУ.

Протокол № 6 від "22" травня 2022 р.

© Сумський національний аграрний університет, 2022

© Бондарев С.Г., 2023

**Теоретична механіка**  
**(розділ Статика) Частина 1**  
**Самостійна робота студентів № 1**

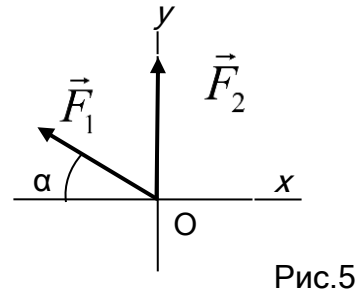
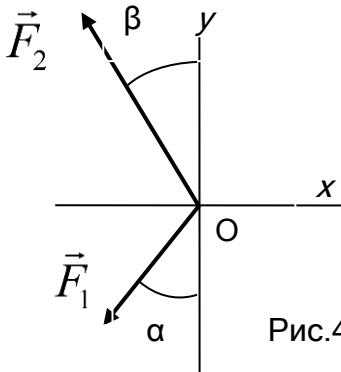
Частина 1 (Статика)

**Тема:** Рівновага плоскої системи збіжних сил (ПСЗС).

**Мета:** Навчитися розв'язувати задачі на рівновагу ПСЗС.

**Вхідний контроль**

1. Сформулюйте умову рівноваги плоскої системи збіжних сил в аналітичній формі.
2. Сформулюйте умову рівноваги плоскої системи збіжних сил в геометричній формі.
3. Що таке реакція в'язі?
4. Як напрямлена реакція прямого стержня?
5. Запишіть рівняння виду  $\sum F_{i\alpha}$  òà  $\sum F_{i\beta}$  для систем сил за рис. 4 та 5.



**Основні теоретичні відомості**

При розв'язуванні задачі на рівновагу ПСЗС *аналітичним методом* потрібно притримуватися наступного порядку:

1. Обрати об'єкт рівноваги – точку, в якій перетинаються лінії дії сил системи.  
Прикласти усі активні (задані) сили, які діють на точку.
2. Звільнити точку від в'язей, замінюючи їх реакціями.
3. Провести вісі проєкцій так, щоб хоча б одна вісь була перпендикулярною будь-якій реакції. Скласти рівняння рівноваги ПСЗС виду  $\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0$  і визначити з рівнянь невідомі реакції.

4. Виконати перевірку розв'язання, склавши рівняння виду  $\sum F_{iU} = 0$ .

При розв'язуванні задачі на рівновагу ПСЗС *графічним методом* починаючи з пункту 3 потрібно притримуватися наступного порядку:

3. Обрати масштаб сил  $\mu_F \left( \frac{H}{cm} \right)$  і визначити довжини векторів відомих сил за

$$\text{формулою } l_{F_i} = \frac{F_i}{\mu_F}.$$

4. Скласти векторне рівняння рівноваги (можливий варіант:  $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{R}_{OA} + \bar{R}_{OB} = 0$ ) і побудувати за цим рівнянням *замкнений* багатокутник сил.

5. Виміряти на багатокутнику довжини векторів  $l_{R_{OA}}$  і  $l_{R_{OB}}$  (см).

6. Визначити величину реакцій за формулами:

$$R_{OA} = l_{R_{OA}} \cdot \mu_F; R_{OB} = l_{R_{OB}} \cdot \mu_F.$$

7. Обчислити похибку графічного методу за формулами:

$$\delta_{R_{OA}} = \frac{|R_{OA}^{AH} - R_{OA}^{GP}|}{R_{OA}^{AH}} \cdot 100\%;$$

$$\delta_{R_{OB}} = \frac{|R_{OB}^{AH} - R_{OB}^{GP}|}{R_{OB}^{AH}} \cdot 100\%.$$

Похибка не повинна перевищувати 3%.

### Завдання

За даною схемою навантаження плоского кронштейна АОВ визначити реакції стержнів аналітичним і графічним методами.

Варіант	Схема навантаження	$F_1$ , Н	$F_2$ , Н	$\alpha$ , град.	$\beta$ , град.
1		10	30	30	30
2		20	40	45	30
3		30	50	60	45
4		40	60	30	45
5		50	70	30	60
6		60	80	30	30

7		70	90	45	30
8		80	100	60	45
9		90	110	30	45
10		100	120	30	60
11		110	130	30	30
12		120	140	45	30
13		130	150	60	45
14		140	160	30	60
15		150	170	45	60
16		160	180	30	30
17		170	190	45	45
18		180	200	60	45
19		190	210	60	60
20		200	220	45	60
21		210	230	30	30
22		220	240	45	30
23		230	250	60	45
24		240	260	45	60
25		250	270	60	60
26		260	280	30	30
27		270	290	45	30
28		280	300	45	45
29		290	310	60	60
30		300	320	60	60

**Приклад.** За схемою на рис. 1 визначити реакції стержнів кронштейна аналітичним і графічним методами якщо:  $F_1 = 60 \text{ Н}$ ,  $F_2 = 40 \text{ Н}$ ,  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

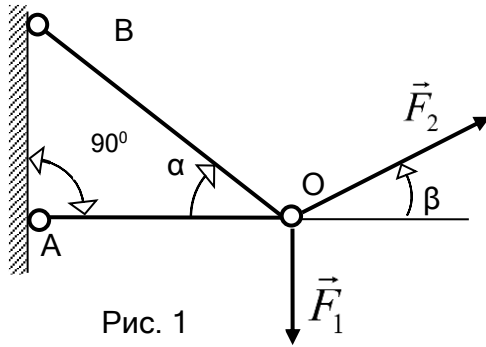


Рис. 1

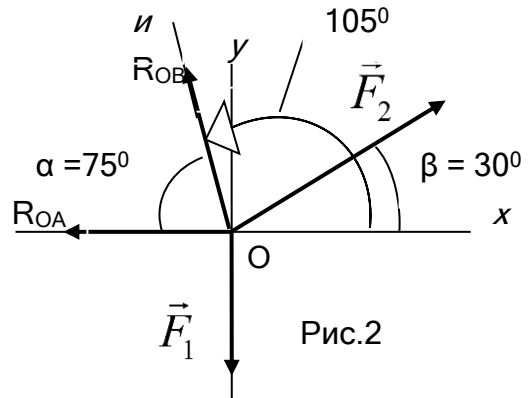


Рис.2

## Розв'язання

### Аналітичний метод

1. Обираємо об'єкт рівноваги – точку  $O$ , в якій перетинаються лінії дії сил системи. Прикладаємо активні (задані) сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , які діють на точку.
2. Звільняємо точку  $O$  від в'язей (стержнів  $OA$  та  $OB$ ), замінюючи їх реакціями  $\vec{R}_{OA}$  та  $\vec{R}_{OB}$ . Реакції  $\vec{R}_{OA}$  та  $\vec{R}_{OB}$  напрямлені вздовж вісей стержнів  $OA$  та  $OB$  відповідно до заданих кутів  $\alpha$  та  $\beta$ .
3. Проводимо вісі проєкцій  $Ox$  та  $Oy$  так, щоб вісь  $Oy$  була перпендикулярною до реакції лінії дії реакції  $\vec{R}_{OA}$ .

Складаємо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил і визначаємо з них реакції стержнів.

$$\sum F_{ix} = F_2 \cos 30^\circ - R_{OA} + R_{OB} \cos 105^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = R_{OB} \cos 15^\circ - F_1 + F_2 \cos 60^\circ = 0. \quad (2)$$

З рівняння (2):

$$R_{OB} = \frac{F_1 - F_2 \cos 60^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{60 - 40 \cdot 0,5}{\cos 15^\circ} = 41,41 \text{ Н}.$$

З рівняння (1):

$$R_{OA} = R_{OB} \cos 105^\circ + F_2 \cos 30^\circ = 41,41 \cos 105^\circ + 40 \cos 30^\circ = 23,92 \text{ Н}.$$

4. Виконуємо перевірку розв'язання.

Проводимо вісь  $u$  за довільним напрямом (в нашому прикладі її напрям співпадає з лінією дії реакції  $\vec{R}_{OB}$ ).

Складаємо рівняння виду  $\sum F_{i\bar{u}}$ . Повинно бути  $\sum F_{i\bar{u}} = 0$ .

$$\sum F_{i\bar{u}} = R_{OB} + R_{OA} \cos 75^\circ + F_2 \cos 75^\circ + F_1 \cos 165^\circ = 41,41 + 23,92 \cdot 0,2588 + 40 \cdot 0,2588 + 60(-0,9659) = 0.$$

Отже, реакції визначені вірно.

**Відповідь:**

Результати аналітичного методу:  $R_{IA}^{\Delta I} = 23,92 \text{ І}$  ;  $R_{IA}^{\Delta I} = 41,41 \text{ І}$

### Графічний метод

1. Обираємо масштаб сил  $\mu_F = 10 \text{ І} / \tilde{\text{н}}$  і визначити довжини векторів відомих сил

за формулою  $l_{F_i} = F_i / \mu_F$  :

$$l_{F_1} = F_1 / \mu_F = 60 / 10 = 6 \tilde{\text{н}} ;$$

$$l_{F_2} = F_2 / \mu_F = 40 / 10 = 4 \tilde{\text{н}} .$$

2. Складаємо векторне рівняння рівноваги:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}_{OA} + \vec{R}_{OB} = 0$$

і будуємо за цим рівнянням *замкнений* багатокутник сил (рис.3)

3. Вимірюємо на багатокутнику довжини векторів  $\vec{R}_{OA}$  та  $\vec{R}_{OB}$  :

$$l_{R_{OA}} = 2,4 \tilde{\text{н}} , l_{R_{OB}} = 4,1 \tilde{\text{н}} .$$

4. Визначаємо величину реакцій :

$$R_{IA}^{\Delta D} = l_{R_{OA}} \cdot \mu_F = 2,4 \cdot 10 = 24 \text{ І} ;$$

$$R_{i\dot{A}}^{\dot{A}D} = l_{R_{OB}} \cdot \mu_F = 4,1 \cdot 10 = 41\dot{I} .$$

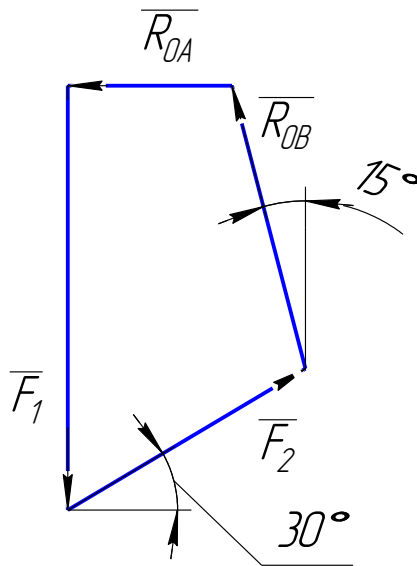


Рис. 3

5. Обчислюємо похибку графічного методу:

$$\delta_{R_{OA}} = \frac{|R_{OA}^{AH} - R_{OA}^{\dot{A}D}|}{R_{OA}^{AH}} \cdot 100\% = \frac{|23,92 - 24|}{23,92} \cdot 100\% = 0,3\% < 3\% ;$$

$$\delta_{R_{OB}} = \frac{|R_{OB}^{AH} - R_{OB}^{\dot{A}D}|}{R_{OB}^{AH}} \cdot 100\% = \frac{|41,41 - 41|}{41,41} \cdot 100\% = 0,99\% < 3\%$$

Похибка не перевищують 3%, отже задачу розв'язано з достатньою точністю.

### Відповідь:

Результати аналітичного методу:  $R_{i\dot{A}}^{\dot{A}I} = 23,92\dot{I}$  ;  $R_{i\dot{A}}^{\dot{A}I} = 41,41\dot{I}$

Результати графічного методу:  $R_{i\dot{A}}^{\dot{A}D} = 24\dot{I}$  ;  $R_{i\dot{A}}^{\dot{A}D} = 41\dot{I}$  .

### Література

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. –К.: Техніка, 2002. – 512с.

§1.10



## Самостійна робота студентів № 2

**Тема:** Рівновага плоскої системи довільно розташованих сил (ПлСДРС).

**Мета:** Навчитися визначати реакції в'язей при дії ПлСДРС .

### Основні теоретичні відомості

Рівняння рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил мають вид:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum F_{ix} = 0,$$

тобто , для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми моментів відносно двох довільних точок і сума проєкцій усіх сил системи на вісь, що лежить в цій площині та не перпендикулярна прямій, що з'єднує ці точки.

При розв'язуванні задачі на рівновагу *ПлСДРС* *аналітичним методом* потрібно притримуватися наступного порядку:

1. Обрати об'єкт рівноваги – балку, до якої прикладені навантаження. Прикласти усі активні (задані) навантаження, які діють на балку.
2. Звільнити балку від в'язей, замінюючи їх реакціями.
3. Провести вісі проєкцій так, щоб одна з вісей (наприклад, вісь *X*) перетнула точки прикладання реакцій, а інша ( вісь *Y*) була перпендикулярною до вісі *X*.
4. Скласти рівняння рівноваги *ПлСДРС* виду  $\sum F_{ix} = 0; \sum \dot{I}_A = 0; \sum \dot{I}_A = 0$  і визначити з рівнянь невідомі реакції.
5. Виконати перевірку розв'язання, склавши рівняння виду  $\sum F_{i0} = 0$ .

### Завдання

За даною схемою навантаження балки АВ (табл.1) визначити реакції її опор.

### Приклад

За даною схемою (рис. 1,а) навантаження балки АВ визначити реакції її опор.

### Розв'язання

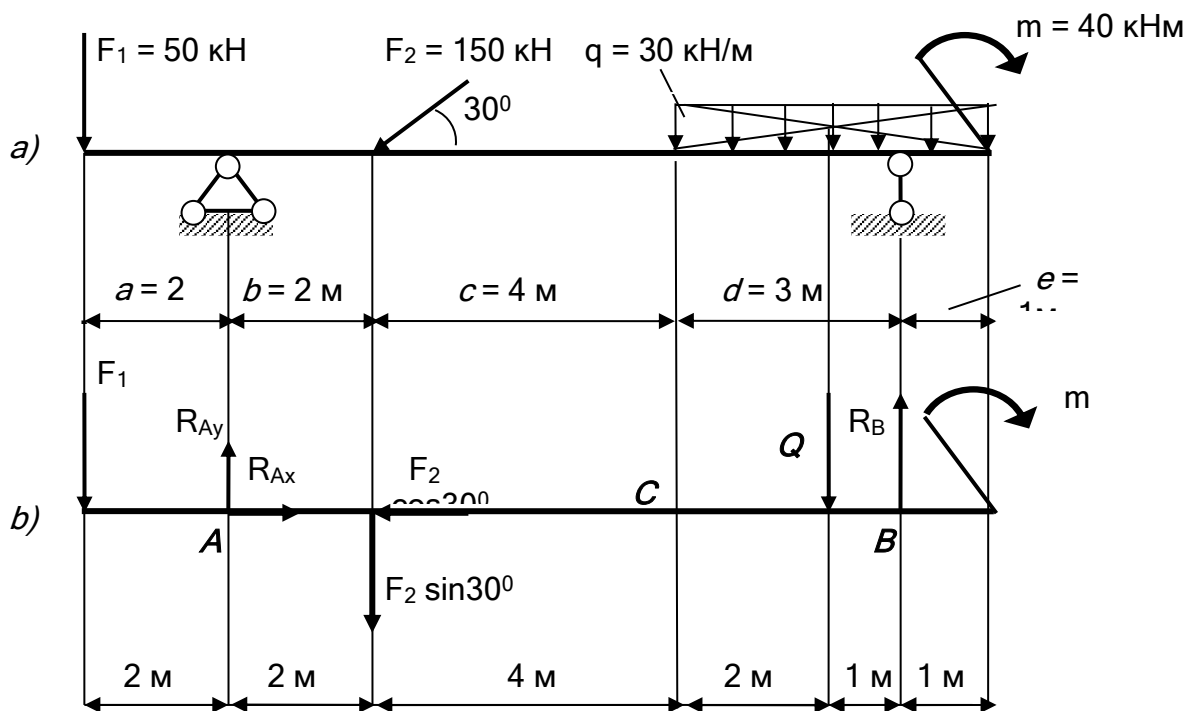


Рис. 1

1. Балку звільняємо від опор, замінюючи останні реакціями  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  та  $R_B$  (рис. 1, в).
2. Розподілене навантаження інтенсивністю  $q$  замінюємо зосередженою силою  $Q = q(d+e) = 30(3+1) = 120$  кН. Сила  $Q$  прикладена посередині ділянки довжиною  $(d+e)$ .
3. Похилу силу  $F_2$  замінюємо горизонтальною  $F_2 \cos 30^\circ$  та вертикальною  $F_2 \sin 30^\circ$  складовими.
4. Прикладаємо решту навантажень – силу  $F_1$  та зосереджений момент  $m$ .
5. Проводимо взаємно перпендикулярні вісі  $x$  та  $y$ .
6. Складаємо рівняння рівноваги ПлСДРС виду  $\sum F_{ix} = 0; \sum \dot{I}_{\dot{A}} = 0; \sum \dot{I}_{\dot{A}} = 0$  визначаємо з них невідомі реакції

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} - F \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_A = -F_1 \cdot 2 + F_2 \sin 30^\circ \cdot 2 + Q \cdot 8 - R_B \cdot 9 + m = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_B = -F_1 \cdot 11 + R_{Ay} \cdot 9 - F_2 \sin \cdot 7 - Q \cdot 1 + m = 0. \quad (3)$$

З рівняння (1):

$$R_{Ax} = F_2 \cos 30^0 = 150 \cdot 0,866 = 129,9 \text{ кН} .$$

З рівняння (2):

$$R_B = \frac{-F_1 \cdot 2 + F_2 \sin 30^0 \cdot 2 + Q \cdot 8 + m}{9} = \frac{-50 \cdot 2 + 150 \cdot 0,5 \cdot 2 + 120 \cdot 8 + 40}{9} = 116,67 \text{ кН}$$

$$R_{Ay} = \frac{F_1 \cdot 11 + F_2 \sin 30^0 \cdot 7 + Q \cdot 1 - m}{9} = \frac{50 \cdot 11 + 150 \cdot 0,5 \cdot 7 + 120 \cdot 1 - 40}{9} = 128,33 \text{ кН}$$

Перевірка:

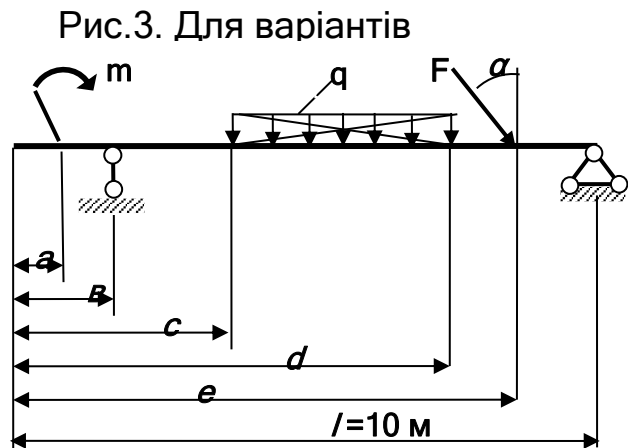
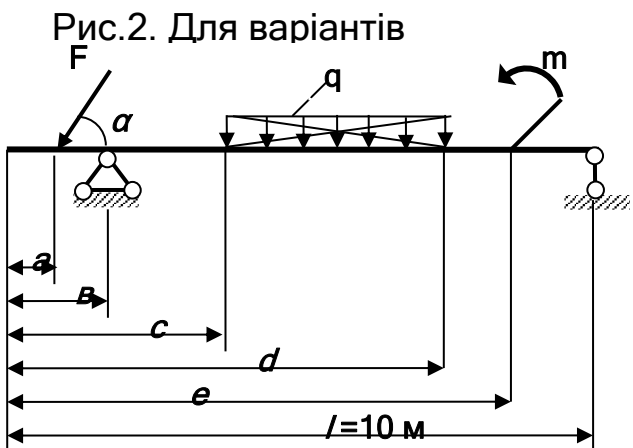
$$\sum F_{iy} = -F_1 + R_{Ay} - F_2 \sin 30^0 - Q + R_B = -50 + 128,33 - 150 \cdot 0,5 - 120 + 116,67 = 0.$$

Реакції визначені правильно.

Відповідь:  $R_{Ax} = 129,9 \text{ кН}$  ;  $R_{Ay} = 128,33 \text{ кН}$  ;  $R_B = 116,67 \text{ кН}$  .

## Література

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. –К.: Техніка, 2002. – 512с.: с. 34-36.



Таблиця 1. Вихідні дані

Вар.	Навантаження			Розміри,м					α, град
	F,кН	q,кН/м	m,кНм	a	b	c	d	e	
1	10	22	4	0	4	2	8	5	15
2	12	14	3	2	0	4	6	8	30
3	14	3	9	8	2	0	5	7	45
4	8	9	12	5	1	4	8	0	60
5	6	21	7	0	2	3	5	9	75
6	14	40	10	3	0	5	8	2	15
7	11	36	6	7	1	0	6	3	30
8	9	18	10	0	2	2	8	0	45
9	21	36	5	0	4	2	8	0	60
10	18	24	8	2	0	4	5	9	75
11	3	8	13	8	2	0	8	2	15
12	5	10	14	5	1	4	6	3	30
13	9	12	10	0	2	3	8	0	45
14	10	6	6	3	0	5	8	5	60
15	21	8	2	7	1	0	6	8	75
16	22	14	8	0	2	2	5	7	15
17	23	23	9	0	2	8	5	2	30
18	25	15	6	2	4	6	8	4	45
19	17	11	11	8	0	5	7	0	60
20	28	9	14	5	4	8	0	4	75
21	31	6	15	0	3	5	9	3	15
22	9	14	8	3	5	8	2	5	30
23	19	18	22	7	0	6	3	0	45
24	21	21	30	0	2	8	0	2	60
25	35	24	5	0	2	8	0	2	75
26	40	56	47	2	4	5	9	4	15
27	36	47	25	8	0	8	2	0	30
28	26	20	4	5	4	6	3	4	45
29	37	17	6	0	3	8	0	3	60
30	14	5	16	3	5	8	5	5	75
31	20	23	24	7	0	6	8	0	15

## Самостійна робота № 3

**Тема:** Рівновага плоскої системи паралельних сил (Пл С П С).

**Мета:** Навчитися визначати реакції в'язей при дії Пл С П С.

**Матеріально – технічне оснащення:** методичні вказівки, калькулятор.

### Вхідний контроль

1. Які рівняння рівноваги складають для плоскої системи паралельних сил (ПлСПС) ?
2. Сформулюйте умову рівноваги ПлСПС.
3. Який порядок побудови розрахункової схеми ?
4. Що називають моментом сили відносно точки ?
5. Складіть за рис.1, в рівняння виду  $\sum M_N(\vec{F}_i) = 0$ ,

### Основні теоретичні відомості

Рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил мають вид:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0 \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad ,$$

тобто , для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми моментів відносно двох довільних точок.

При розв'язуванні задачі на рівновагу ПлСПС аналітичним методом потрібно притримуватися наступного порядку:

1. Обрати об'єкт рівноваги – балку, до якої прикладені навантаження. Прикласти усі активні (задані) навантаження, які діють на балку.
2. Звільнити балку від в'язей, замінюючи їх реакціями.
3. Провести вісі проекцій так, щоб одна з вісей (наприклад, вісь **X**) перетнула точки прикладання реакцій, а інша (вісь **Y**) була перпендикулярною до вісі **X**.

- Скласти рівняння рівноваги ПЛСПС виду  $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \sum M_B(\vec{F}_i) = 0$ , і визначити з рівнянь невідомі реакції.
- Виконати перевірку розв'язання, склавши рівняння виду  $\sum F_{i0} = 0$ .

### Завдання

За даною схемою навантаження балки АВ (табл.1) визначити реакції її опор.

### Приклад

За даною схемою (рис.1,а) навантаження балки АВ визначити реакції її опор.

### Розв'язання

- Балку звільняємо від в'язей, замінюючи останні реакціями  $R_A$  та  $R_B$  (рис.1,в).

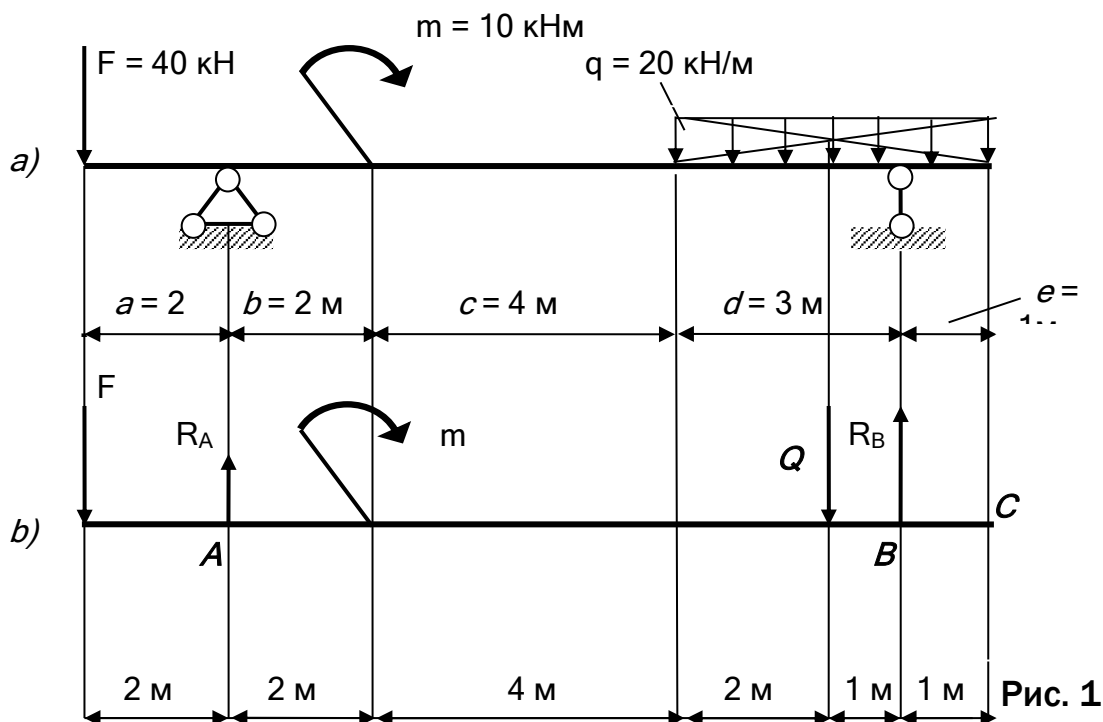


Рис. 1

- Розподілене навантаження інтенсивністю  $q$  замінюємо зосередженою силою  $Q = q(d+e) = 20(3+1) = 80$  кН. Сила  $Q$  прикладена посередині ділянки довжиною  $(d+e)$ .
- Прикладаємо решту навантажень – силу  $F$  та зосереджений момент  $m$ .

4. Проводимо взаємно перпендикулярні вісі  $x$  та  $y$ .

5. Складаємо рівняння рівноваги ПлСПС виду  $\sum M_A(\vec{F}_i) = 0$   $\sum M_B(\vec{F}_i) = 0$ , і визначаємо з них невідомі реакції

$$\sum M_A = -F \cdot 2 + Q \cdot 8 - R_B \cdot 9 + m = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_B = -F \cdot 11 + R_A \cdot 9 - Q \cdot 1 + m = 0. \quad (2)$$

З рівняння (1):

$$R_B = \frac{-F \cdot 2 + Q \cdot 8 + m}{9} = \frac{-40 \cdot 2 + 80 \cdot 8 + 10}{9} = 63,33 \text{êÍ}$$

З рівняння (2):

$$R_{Ay} = \frac{F \cdot 11 + Q \cdot 1 - m}{9} = \frac{40 \cdot 11 + 80 \cdot 1 - 10}{9} = 56,67 \text{êÍ}$$

Перевірка:

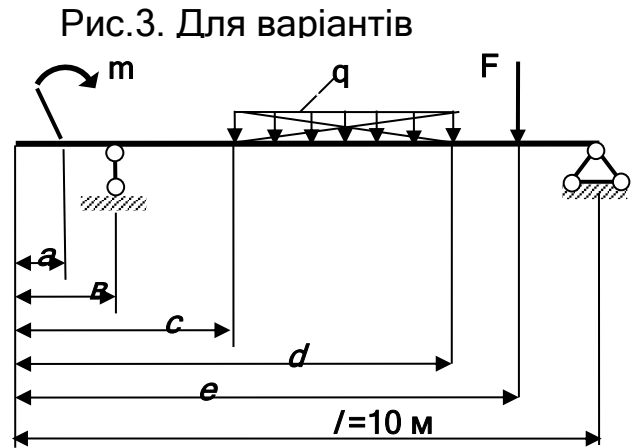
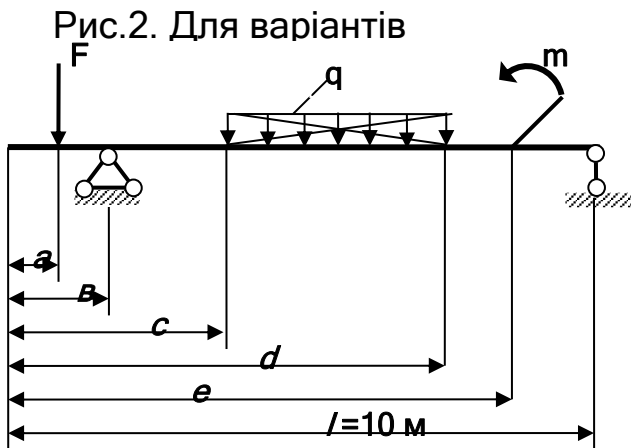
$$\sum F_{iy} = -F + R_A - Q + R_B = -40 + 56,67 - 80 + 63,33 = 0.$$

Реакції визначені правильно.

Відповідь:  $R_A = 56,67 \text{êÍ}$  ;  $R_B = 63,33 \text{êÍ}$  .

## Література

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. –К.: Техніка, 2002. – 512с. :с.



Таблиця 1. Вихідні дані

Вар.	Навантаження			Розміри, м				
	F, кН	q, кН/м	m, кНм	a	b	c	d	e
1	10	22	4	0	4	2	8	5
2	12	14	3	2	0	4	6	8
3	14	3	9	8	2	0	5	7
4	8	9	12	5	1	4	8	0
5	6	21	7	0	2	3	5	9
6	14	40	10	3	0	5	8	2
7	11	36	6	7	1	0	6	3
8	9	18	10	0	2	2	8	0
9	21	36	5	0	4	2	8	0
10	18	24	8	2	0	4	5	9
11	3	8	13	8	2	0	8	2
12	5	10	14	5	1	4	6	3
13	9	12	10	0	2	3	8	0
14	10	6	6	3	0	5	8	5
15	21	8	2	7	1	0	6	8
16	22	14	8	0	2	2	5	7
17	23	23	9	0	2	8	5	2
18	25	15	6	2	4	6	8	4



19	17	11	11	8	0	5	7	0
20	28	9	14	5	4	8	0	4
21	31	6	15	0	3	5	9	3
22	9	14	8	3	5	8	2	5
23	19	18	22	7	0	6	3	0
24	21	21	30	0	2	8	0	2
25	35	24	5	0	2	8	0	2
26	40	56	47	2	4	5	9	4
27	36	47	25	8	0	8	2	0
28	26	20	4	5	4	6	3	4
29	37	17	6	0	3	8	0	3
30	14	5	16	3	5	8	5	5
31	20	23	24	7	0	6	8	0

## Самостійна робота № 4

**Тема:** Рівновага плоскої системи паралельних сил (Пл С П С).

**Мета:** Навчитися визначати реакції в'язей при дії Пл С П С.

Визначити реакції опор конструкції, яка схематично показана на рис. С1, числові дані вказані в таблиці С1.

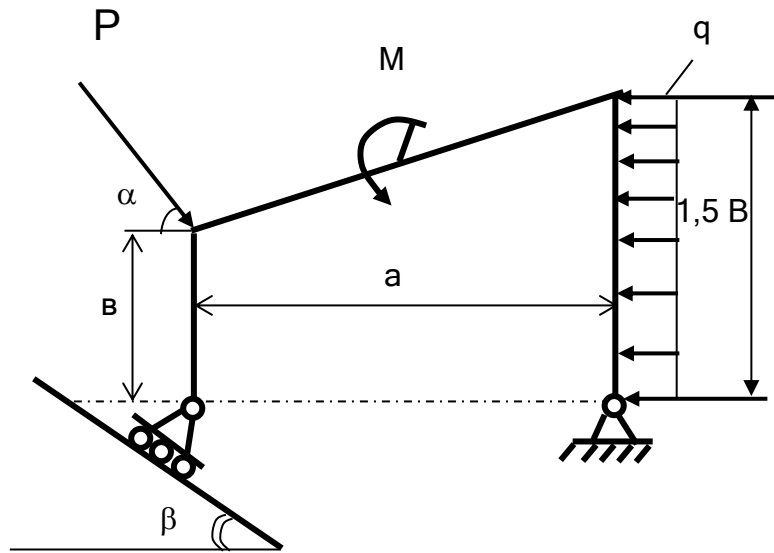
**Вказівки.** Задача С1 – на рівновагу тіла під дією плоскої довільної системи сил. При її розв'язуванні треба рівномірно розподілене навантаження замінити зосередженою силою.

При складанні рівняння моментів доцільно обрати точку, де перетинаються лінії дії двох реакцій в'язей. При обчисленні моменту сили  $P$  зручно наперед розкласти її на дві складові, вертикальну та горизонтальну.

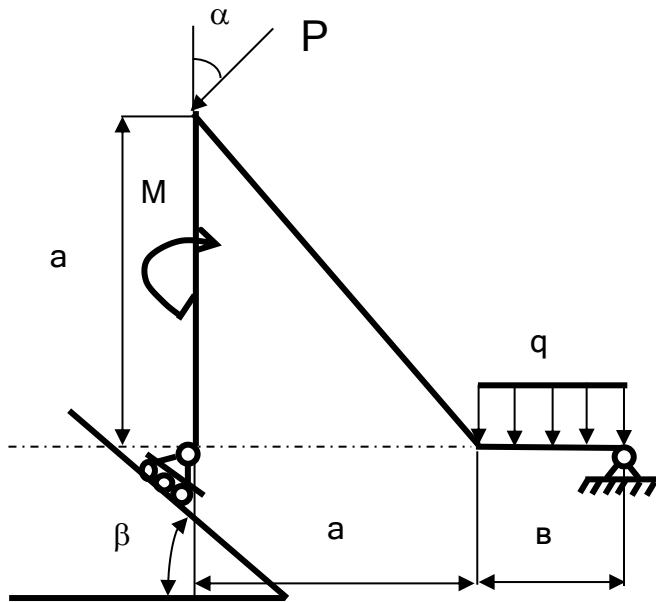
*Таблиця*

Варіант	$P$ , кН	$q$ , кН/м	$M$ , кН·м	$a$ , м	$b$ , м	$\alpha$ , град	$\beta$ , град
0	10	2	4	6	4	30	50
1	50	12	10	2	1	70	20
2	120	20	24	4	3	40	35
3	3	1	12	6	2	20	60
4	40	4	18	4	1	25	48
5	16	2	24	5	1	65	25
6	70	6	40	3	2	54	36
7	6	10	16	7	3	35	40
8	100	20	36	3	1	60	20
9	8	4	12	5	3	25	60

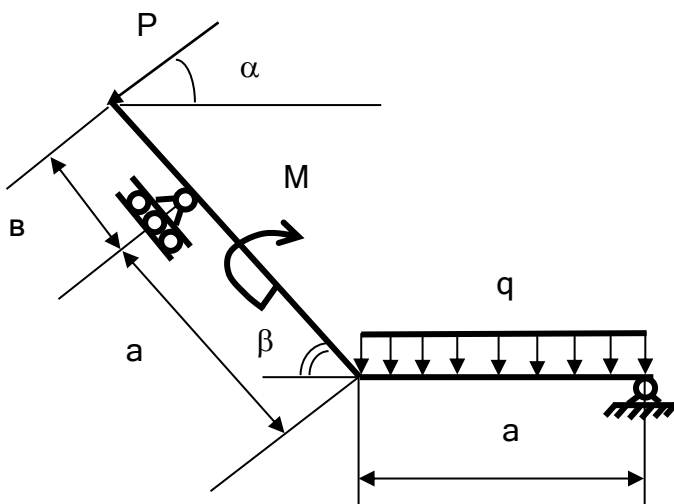
0

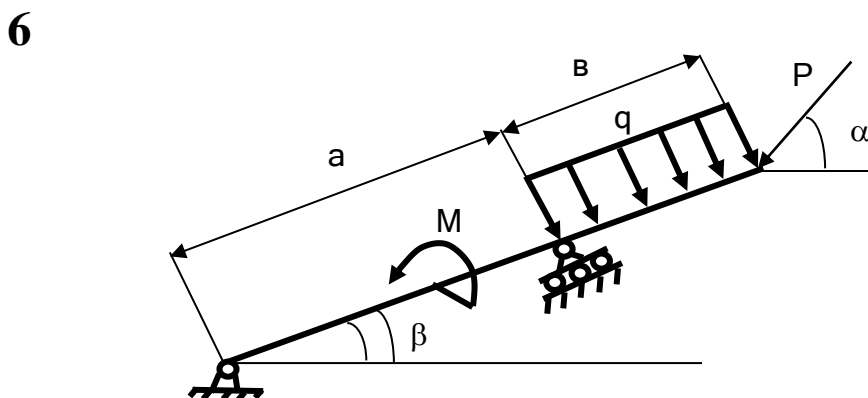
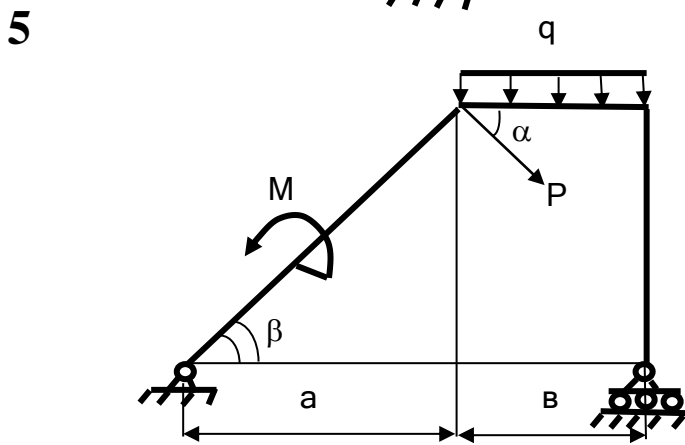
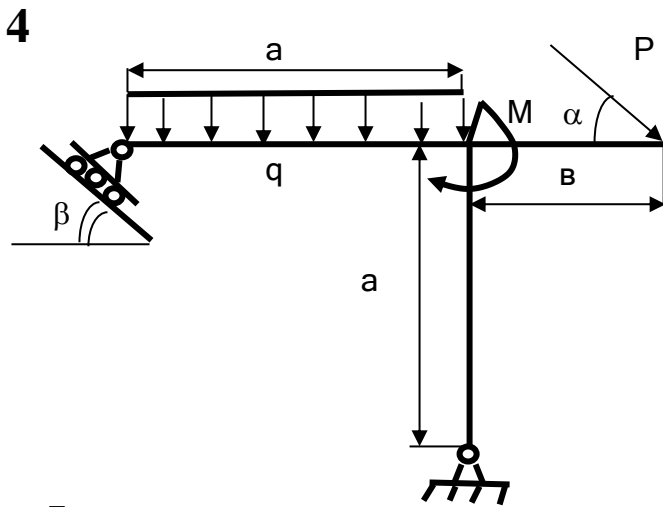
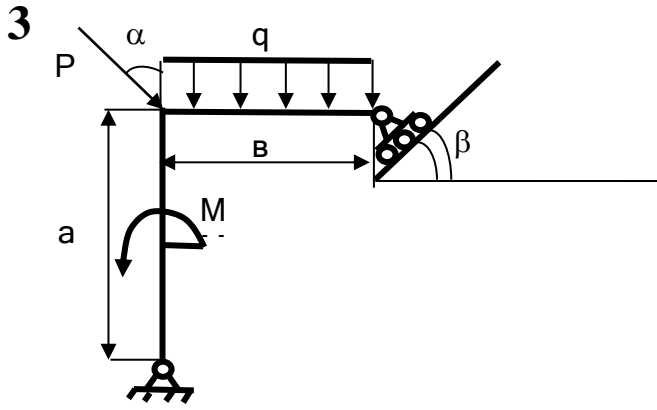


1



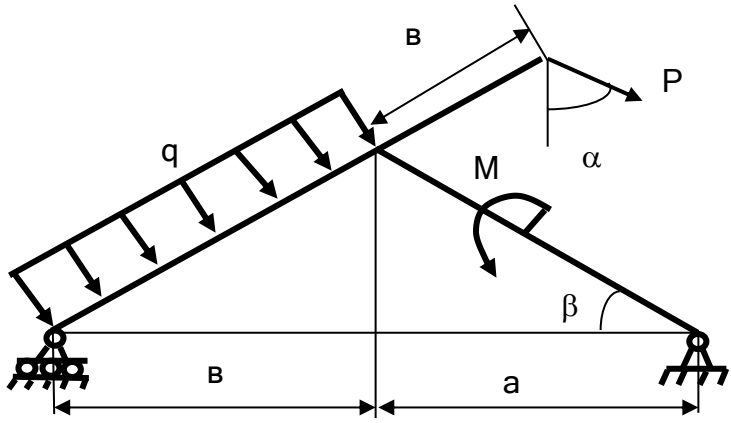
2



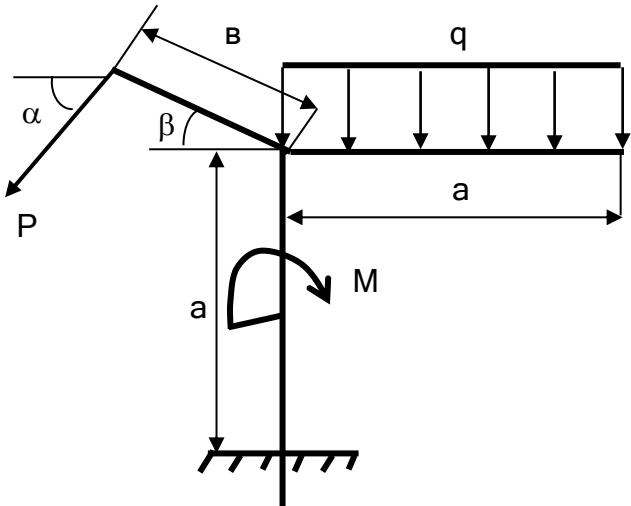


7

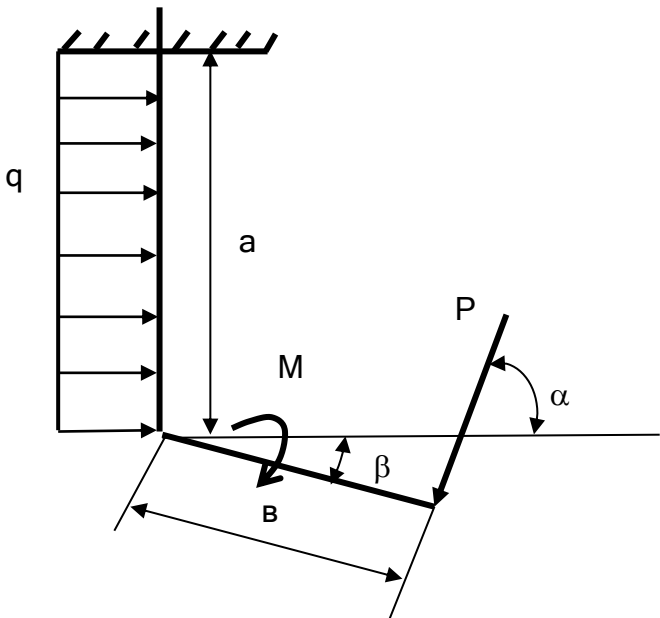
21



8



9



**Література**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. –К.: Техніка, 2002. – 512с. :с. 34-36

# Механіка матеріалів і конструкцій

## Частина 2

### Самостійна робота студентів №1

#### Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі

**Мета роботи:** Засвоїти методику визначення моменту інерції, та опору перерізу а також радіусу інерції перерізу балки, яка складається з декількох елементів прокатної сталі на прикладі запропонованої задачі, та самостійно вирішити типову задачу за номером варіанту згідно номера у списку групи.

#### Приклад виконання роботи:

На рис. 1 зображено плоский переріз конструкції, яка складається з двох швелерів №12 (вони позначені позиціями 1 та 3) та двох швелерів №18 (вони позначені позиціями 2 та 4). Необхідно знайти осьові моменти інерції  $I_{x_c}$ ,  $I_{y_c}$  для даного перерізу, моменти опору перерізу  $Y_{x_c}$ ,  $X_{y_c}$  та радіуси інерції  $i_x$ ,  $i_y$ .

1. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері, вказуємо розміри та вибираємо осі координат з початком в центрі ваги кожного елемента конструкції (рис. 2.11).

2. Випишуємо дані з таблиці сортаменту (додаток 2). Для швелерів №12 та 18 переводимо значення всіх параметрів із мм в см. Необхідно пам'ятати про приведення всіх показників до однакових одиниць виміру.

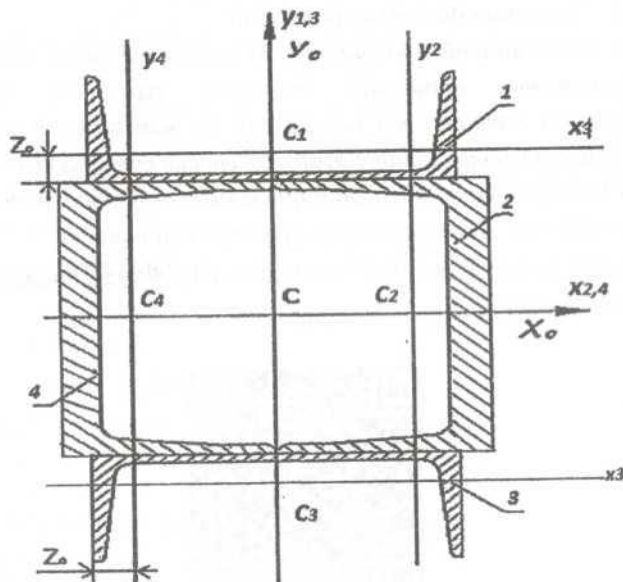


Рис. 1 Плоский симетричний переріз

**Позиція 2,4 - профіль № 18:      Позиція 1,3 профіль - № 12:**

$$\begin{aligned} h_2 &= 180\text{мм} = 18\text{см}; \\ b_2 &= 70\text{мм} = 7\text{см}; \\ d_2 &= 5,1\text{мм} = 0,51\text{см}; \\ t_2 &= 8,7\text{мм} = 0,87\text{см}; \\ F_2 &= 20,7\text{ см}^2; \\ I_{y2} &= 86\text{см}^4; \\ I_{x2} &= 1090\text{см}^4; \\ Z_{02} &= 1,94\text{ см} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= 120\text{мм} = 12\text{см}; \\ b_1 &= 52\text{мм} = 5,2\text{см}; \\ d_1 &= 4,8\text{мм} = 0,48\text{см}; \\ t_1 &= 7,8\text{мм} = 0,78\text{см}; \\ F_1 &= 13,3\text{ см}^2; \\ I_y &= 31,2\text{ см}^4 = I_{x1} = I_{x3}; \\ I_x &= 304\text{см}^4 = I_{y1} = I_{y3}; \\ Z_{01} &= 1,54\text{ см} \end{aligned}$$

### Розв'язання

1. Дана конструкція є симетричною, центром в точці С. Введемо систему координат  $X_c U_c$  з початком в точці С. Осі  $X_c U_c$  називаються центральними осями. Знайдемо координати центра ваги кожного елемента конструкції в цій системі координат.

$$C_1 = \begin{cases} X_{c1} = 0; \\ Y_{c1} = \frac{h_2}{2} + Z_{01} = 9 + 1,54 = 10,54\text{ см}; \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} X_{c2} = b_2 - Z_{02} = 7 - 1,94 = 5,06\text{ см}; \\ Y_{c2} = 0; \end{cases}$$

$$C_3 = \begin{cases} X_{c3} = 0; \\ Y_{c3} = -10,54\text{ см}; \end{cases} \quad C_4 = \begin{cases} X_{c4} = -5,06\text{ см}; \\ Y_{c4} = 0. \end{cases}$$

2. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу, а також відцентрові моменти інерції. Центральні моменти інерції - це моменти інерції перерізу відносно центральних осей. Для визначення центральних моментів інерції складної фігури потрібно скористатись теоремою про моменти інерції відносно паралельних осей. Так як переріз включає в себе чотири складові фігури, то формула буде виглядати наступним чином:

$$\begin{aligned} I_u = I_{xc} &= I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4} + F_1 \cdot (Y_{c1})^2 + F_2 \cdot (Y_{c2})^2 + F_3 \cdot (Y_{c3})^2 + F_4 \cdot (Y_{c4})^2; \\ I_v = I_{yc} &= I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + I_{y4} + F_1 \cdot (X_{c1})^2 + F_2 \cdot (X_{c2})^2 + F_3 \cdot (X_{c3})^2 + F_4 \cdot (X_{c4})^2. \end{aligned}$$

Підставляємо числові дані і отримуємо: тому що осі  $X_c U_c$  є головними центральними осями.

$$\begin{aligned} I_{xc} &= 31,2 + 31,2 + 1090 + 1090 + 13,3 \cdot (10,54)^2 + 13,3 \cdot (-10,54)^2 + 20,7 \cdot 0 + 20,7 \cdot 0 = \\ &= 2242,4 + 1477,5 + 1477,5 = 5197,44\text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yc} &= 86 + 86 + 304 + 304 + 13,3 \cdot 0 + 13,3 \cdot 0 + 20,7 \cdot (5,06)^2 + 20,7 \cdot (-5,06)^2 = \\ &= 1840\text{ см}^4. \end{aligned}$$

3. Визначаємо момент опору перерізу. Формула для знаходження моменту опору перерізу має вигляд:



$$W_x = \frac{I_{xc}}{y_{max}}; \quad W_y = \frac{I_{yc}}{x_{max}}$$

Необхідно визначити  $y_{max}$  та  $x_{max}$ :

$$y_{max} = 9 + 5,2 = 14,2 \text{ см}; \quad x_{max} = 7 \text{ см};$$

$$W_x = \frac{5197,44}{14,2} = 366,02 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{1840}{7,0} = 262,86 \text{ см}^3.$$

4. Визначаємо радіуси інерції за формулами:

$$i_{xc} = \sqrt{\frac{5197,44}{68}} = 8,74 \text{ см}; \quad i_{yc} = \sqrt{\frac{1840}{68}} = 5,2 \text{ см}.$$








У разі якщо переріз фігури має дві осі симетрії, то ці осі є головними центральними осями і відцентрові моменти інерції відносно них дорівнюють нулю. Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх заданих невідомих величин.

$$\text{Відповідь: } I_{xc} = 5197,44 \text{ см}^4; \quad I_{yc} = 1840 \text{ см}^4; \quad W_{xc} = 366,02 \text{ см}^3;$$

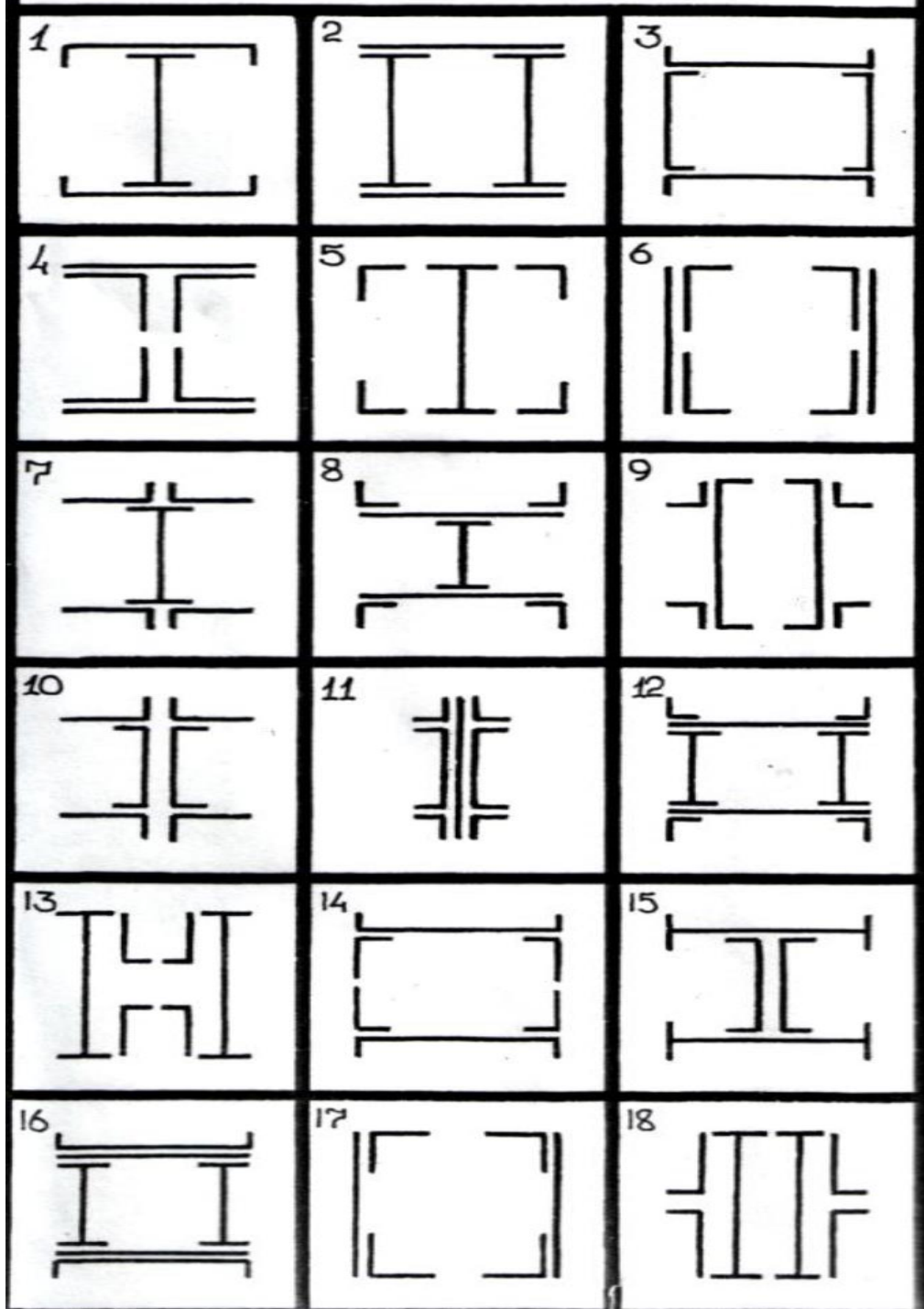
$$W_{yc} = 262,86 \text{ см}^3; \quad i_{xc} = 8,74 \text{ см}; \quad i_{yc} = 5,2 \text{ см}.$$

### ***Завдання для самостійного виконання***

1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (додаток 2). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.
2. Вибрати допоміжні координатні осі.
3. Знайти координати центру ваги перерізу.
4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.
5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.
6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.
7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.
8. Визначити осьові моменти перерізу.
9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.
10. Виконати перевірку.

№	№ профілів							Розміри		
					Лист 			a, мм	b, мм	c, мм
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60
20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20
21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40
24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30

## ЗАДАЧА № 1



## Самостійна робота №2 Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів

**Мета роботи:** Засвоїти методику визначення моменту інерції, опору перерізу а також радіусу інерції пластини.

- 1. Приклад виконання роботи:** На рис. зображено плоский несиметричний переріз із зміщеним центром ваги. Переріз складається з прямокутника, висота якого  $b = 40$  мм, ширина  $B = 80$  мм та вирізаного напівкруга з діаметром  $d = 20$  мм. Необхідно знайти координати центру ваги конструкції ( $X_c$ ;  $Y_c$ ), осьові моменти інерції ( $I_{xc}$ ;  $I_{yc}$ ) моменти опору перерізу ( $W_{xc}$ ;  $W_{yc}$ ) та радіуси інерції ( $I_{xc}$ ;  $I_{yc}$ )»

### Розв'язання

- Представимо переріз у вигляді простих фігур: прямокутника зі сторонами 40 мм і 80 мм, виріз якого є напівкругом з діаметром 20 мм, центр якого знаходиться на відстані  $0,212d$  від краю прямокутника.
- Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері, вказуємо розміри та позначаємо осі. Здійснюємо переведення одиниць виміру, отримуємо:  $h = 40\text{мм.} = 4\text{ см}$ ,  $B = 80\text{ мм.} = 8\text{см}$ , ( $d = 20\text{ мм.} = 2\text{ см}$ ).

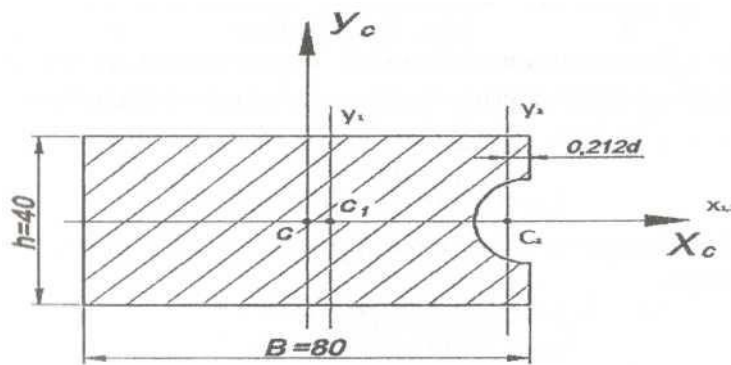


Рис. Плоский несиметричний переріз

- Визначаємо величину площі кожної з фігур:

$$F_1 = h \cdot b = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2;$$

$$F_2 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{3,14 \cdot (2)^2}{8} = 1,57 \text{ см}^2.$$

Для вирізаного напівкруга значення площі  $F$  та осьових моментів інерції  $I_{xc2}$ ,  $I_{yc2}$  приймається як від'ємне.

- Визначимо координати центра ваги кожної з фігур:

$$C_1 = \begin{cases} X_1 = 0; \\ Y_1 = 0; \end{cases} \quad C_2 = \begin{cases} X_2 = 4 - 0,212 \cdot d = 3,576 \text{ см}; \\ Y_2 = 0. \end{cases}$$

Визначимо координати центру ваги складної фігури за формулами:

$$Y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F}; \quad X_c = \frac{\sum S_y}{\sum F}.$$

Невідомими є статичні моменти площі

$$S_{x1}, S_{x2}, S_{y1}, S_{y2} :$$

$$\begin{aligned} S_{x1} &= F_1 \cdot Y_1 = 0; & S_{x2} &= F_2 \cdot Y_2 = 0; \\ S_{y1} &= F_1 \cdot X_1 = 0; & S_{y2} &= F_2 \cdot X_2 = (-1,57) \cdot 3,576 = -5,614 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Підставляємо значення статичних моментів площі у формулу координат центру ваги.

$$Y_c = 0; \quad X_c = \frac{-5,614+0}{32-1,57} = \frac{-5,614}{30,43} = -0,185 \text{ см}.$$

5. Визначимо координати центрів ваги простих фігур відносно координат центра ваги всієї конструкції ( $X_c Y_c$ ).

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{cases} X_1 = -X_c = -(-0,185) = 0,185 \text{ см}; \\ Y_1 = -Y_c = 0 \text{ см}. \end{cases} \\ C_2 &= \begin{cases} X_2 = X_2 - X_c = 3,576 - (-0,185) = 3,761 \text{ см}; \\ Y_2 = Y_2 - Y_c = 0 \text{ см}. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Визначимо власні моменти інерції кожної фігури. Для прямокутника осьові моменти інерції визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} I_{x1} &= \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 4^3}{12} = 42,7 \text{ см}^4; \\ I_{y1} &= \frac{hb^3}{12} = \frac{4 \cdot 8^3}{12} = 170,7 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Для напівкруга осьові моменти інерції  $I_{xc}$  та  $I_{yc}$  приймаються від'ємними.

$$\begin{aligned} I_{x2} &= -0,393 \cdot R^4 = -0,393 \text{ см}^4; \\ I_{y2} &= -0,11 \cdot R^4 = -0,11 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

7. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу:

$$\begin{aligned} I_u = I_{xc} &= I_{x1} + F_1 \cdot y_{c1}^2 + I_{x2} + F_2 \cdot y_{c2}^2 = 42,7 + 32 \cdot 0 - 0,393 + (-1,54) \cdot 0 = \\ &= 42,3 \text{ см}^4; \\ I_v = I_{yc} &= I_{y1} + F_1 \cdot x_{xc}^2 + I_{y2} + F_2 \cdot x_{c2}^2 = 170,7 + 32 \cdot (0,185)^2 + \\ &+ (-0,393) + (-1,57) \cdot (3,761)^2 = 170,6 + 1,0952 - 0,11 - 27,2 = 149,21 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

8. Визначаємо моменти опору перерізу, де  $U_{max}$  та  $X_{max}$  – це відстань від нейтральної осі до найбільш віддалених від неї точок перерізу. Максимальна відстань від центра ваги по осі  $y$  буде  $U_{max} = 2 \text{ см}$ , по осі  $x$  буде дорівнювати  $x_{max} = 4,185 \text{ см}$ .

$$W_{xc} = \frac{I_{xc}}{y_{max}}; \quad (y_{max} = 2 \text{ см});$$

$$W_{xc} = \frac{42,2}{2} = 21,15 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_{yc}}{x_{max}}; \quad (x_{max} = 4,185 \text{ см});$$

$$W_y = \frac{149,21}{4,185} = 35,66 \text{ см}^2.$$

9. Визначаємо радіуси інерції перерізу за формулами:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{xc}}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_{yc}}{F}}.$$

Необхідно обчислити сумарну площу всього перерізу

$$\Sigma F = F_1 + (-F_2) = 32 - 1,57 = 30,43 \text{ см}^2.$$

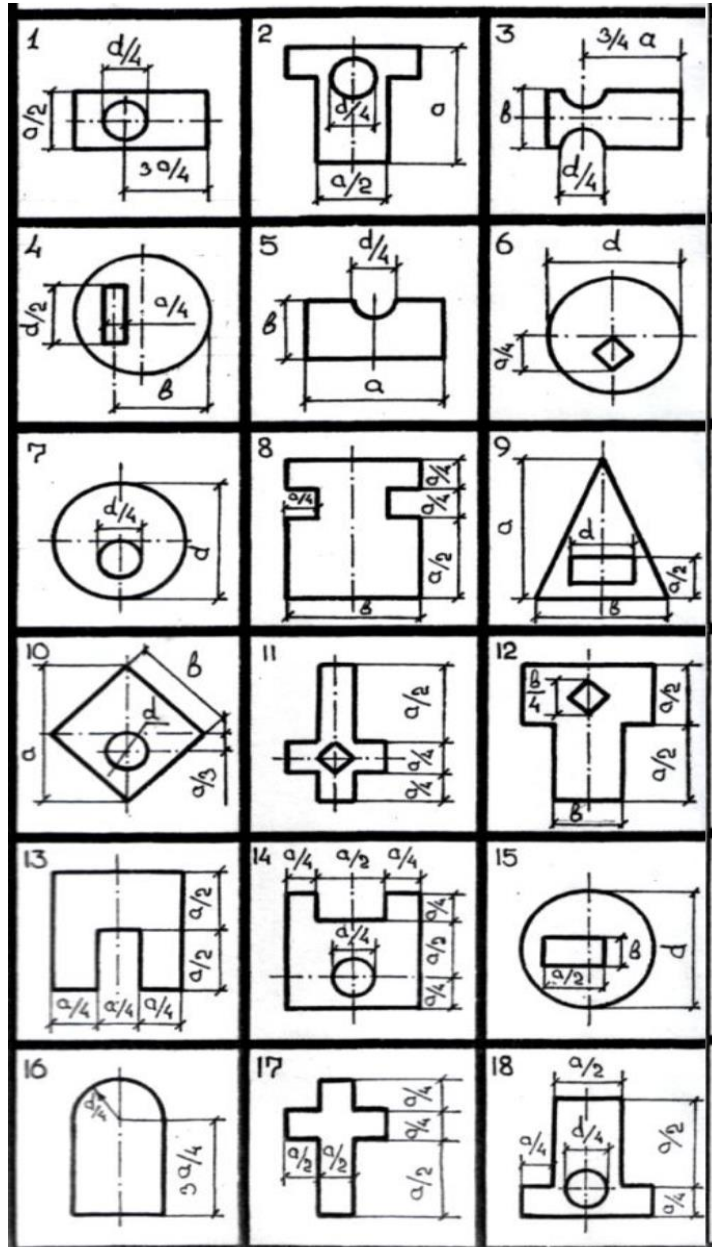
Обчислюємо значення радіусів інерції перерізу

$$i_x = \sqrt{\frac{42,3}{30,43}} = \sqrt{1,39} = 1,18 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{149,21}{30,48}} = \sqrt{4,9} = 2,21 \text{ см}.$$

Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх даних невідомих величин.

$$\text{Відповідь: } I_{xc} = 42,3 \text{ см}^4; \quad I_{yc} = 149,21 \text{ см}^4; \quad W_{xc} = 21,15 \text{ см}^3; \\ W_{yc} = 35,66 \text{ см}^3; \quad i_{xc} = 1,18 \text{ см}; \quad i_{yc} = 2,21 \text{ см}.$$

Варіанти для самостійного опрацювання студентами. Варіанти завдань відповідають порядковому номеру у групі



## Самостійна робота №3

**Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для двох елементів**

**Мета роботи:** Засвоїти методику визначення моменту інерції, та опору перерізу а також радіусу інерції перерізу балки, яка складається з декількох елементів прокатної сталі на прикладі запропонованої задачі, та самостійно вирішити типову задачу за номером варіанту згідно номера у списку групи.

**1. Приклад виконання роботи:**

На рис. зображено конструкцію, яка складається зі швелера №24 та нерівностороннього кутника №14/9 (додаток 2). Необхідно визначити координати центра ваги конструкції ( $x_c$ ;  $y_c$ ), осьові моменти інерції ( $I_{x_c}$ ;  $I_{y_c}$ ), відцентрові моменти інерції ( $I_{x_c}$ ;  $I_{y_c}$ ).

**Розв'язання**

1. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері з вказанням розмірів, показуємо осі.
2. Випишуємо дані з сортаменту, приводимо значення розмірів профілів до одних одиниць виміру.

<p><b>Швелер (№24 (позиція 2):</b>  <math>h_2 = 240 \text{ мм.} = 24 \text{ см};</math>  <math>b_2 = 90 \text{ мм.} = 9 \text{ см};</math>  <math>d_2 = 5.6 \text{ мм.} = 0,56 \text{ мм}</math>  <math>t_2 = 10 \text{ мм.} = 0,1 \text{ см.}</math>  <math>F_2 = 30,6 \text{ см}^2;</math>  <math>I_{x_2} = 2900 \text{ см}^4;</math>  <math>I_{y_2} = 208 \text{ см}^4;</math>  <math>Z_{02} = 2,42 \text{ см}</math>  <math>I_{xy_2} = 0</math></p>	<p><b>Нерівнобокий кутник (№14/9 (позиція 1):</b>  <math>B_1 = 140 \text{ мм} = 14 \text{ см};</math>  <math>b_1 = 90 \text{ мм} = 9 \text{ см};</math>  <math>d_1 = 10 \text{ мм} = 1 \text{ см};</math>  <math>F_1 = 22,2 \text{ см}^2;</math>  <math>I_{y_1} = 146 \text{ см}^4 = I_x;</math>  <math>I_{x_1} = 444 \text{ см}^4 = I_y;</math>  <math>X_{01} = 2,12 = Y_{01};</math>  <math>Y_{01} = 4,58 = X_{01}.</math>  <math>I_{\min 1} = 85,5 \text{ см}^4; '</math>  <math>\text{tg} \alpha = 0,406; \alpha = 22^{\circ}15''</math></p>
---	--



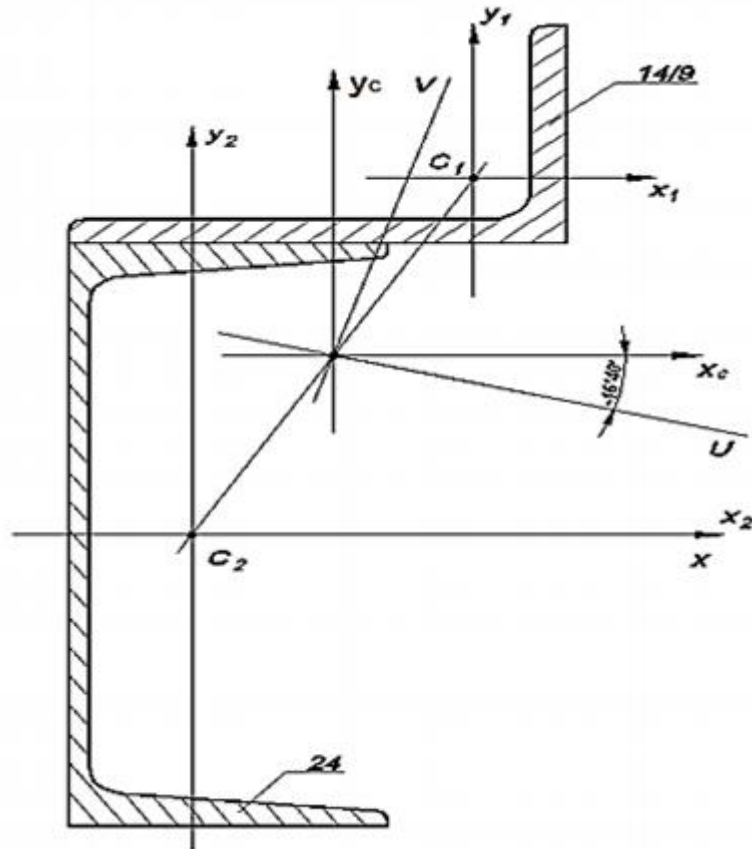


Рис. Плоский несиметричний переріз прокатної сталі

3. Через центр ваги  $C_1$  кутника проведемо осі  $x_1y_1$ , а через центр ваги  $C_2$  швелера - осі  $x_2y_2$  (рис.). Так як початок координатних осей  $x_2y_2$  вибрано в центрі ваги  $C_2$  швелера, тоді за початок відліку приймемо координати  $C_2$ . Запишемо координати центра ваги кожної фігури відносно осей порівняння, це осі  $x_2y_2$ .

$$C_1 = \begin{cases} X_1 = B_1 - Z_{01} - X_{02} = 14 - 2,42 - 4,58 = 7 \text{ см}; \\ Y_1 = \frac{h_1}{2} + Y_{02} = 12 + 2,12 = 14,12 \text{ см}; \end{cases} \quad C_2 = \begin{cases} X_2 = 0; \\ Y_2 = 0. \end{cases}$$

4. Визначаємо координати центра ваги всього перерізу за формулами:

$$X_c = \frac{\sum S y_i}{\sum F}; \quad Y_c = \frac{\sum S x_i}{\sum F}.$$

Обчислюємо значення статичних моментів площі:

$$\begin{aligned} S_{X1} &= y_1 \cdot F_1 = 14,12 \cdot 22,2 = 313,5 \text{ см}^3; & S_{X2} &= y_2 \cdot F_2 = 0; \\ S_{Y1} &= X_1 \cdot F_1 = 7 \cdot 22,2 = 155,4 \text{ см}^3; & S_{Y2} &= X_2 \cdot F_2 = 0. \end{aligned}$$

За формулою розрахуємо координати центра ваги даної конструкції:

$$X_c = \frac{155,4}{22,2+30,6} = \frac{155,4}{52,8} = 2,94 \text{ см}; \quad Y_c = \frac{313,4}{22,2+30,6} = 5,95 \text{ см}.$$

5. В системі координат  $x_2y_2$  покажемо положення центра ваги всієї фігури. Це точка С з координатами  $X_c = 2,94$  см;  $y_c = 5,95$  см. Виберемо в точці С початок центральних осей  $x_{c y_c}$ , які паралельні осям  $X_{i1}$  і  $x_2y_2$ . В системі координат  $x_{c y_c}$  знайдемо координати центрів ваги  $C_1$  і  $C_2$ .

$$C_1 = \begin{cases} X_{C1} = 7 - 2,94 = 4,06 \text{ см;} \\ Y_{C1} = 14,12 - 5,95 = 8,17 \text{ см;} \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} X_{C2} = -2,94 \text{ см;} \\ Y_{C2} = -5,95 \text{ см.} \end{cases}$$

6. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу, а також відцентрові моменти інерції за формулами:

$$I_{Xc} = I_{X1} + F_1 \cdot Y_{C1} + I_{X2} + F_2 \cdot Y_{C2} = 146 + 22,2 \cdot (8,17)^2 + 2900 + 30,6 \cdot (-5,95)^2 = 5611,1 \text{ см}^4;$$

$$I_{Yc} = I_{Y1} + F_1 \cdot X_{Y1} + I_{Y2} + F_2 \cdot X_{Y2} = 444 + 22,2 \cdot (4,06)^2 + 208 + 30,6 \cdot (-2,94)^2 = 1282,44 \text{ см}^4 ;$$

$$I_{XcYc} = I_{X1Y1} + F_1 \cdot X_{C1} \cdot Y_{C1} + I_{X2Y2} + F_2 \cdot X_{C2} \cdot Y_{C2};$$

$$I_{x2y2} = 0;$$

$$I_{x1y1} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin \alpha_0;$$

$$I_{max} = I_{X1} + I_{Y1} - I_{min} = 444 + 146 - 85,5 = 504,5;$$

$$I_{x1y1} = \frac{504,5 - 85,5}{2} \cdot \sin(22^\circ 15') = 146,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{XcYc} = 146,7 + 22,2 \cdot 4,06 \cdot 8,18 + 30,6 \cdot (-2,94) \cdot (-5,94) = 1417,5 \text{ см}^4.$$

7. Знайдемо положення головних осей інерції. Головні осі - це ті осі, відносно яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю. На рисунку побудовані осі  $u, v$ . Визначаємо кут нахилу головних центральних осей перерізу відносно центральних осей  $X_c, Y_c$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{XcYc}}{I_{Yc} - I_{Xc}} = \frac{2 \cdot 1417,5}{1282,4 - 5611,1} = -0,66;$$

$$2\alpha = -33^\circ 20'; \quad \alpha = 16^\circ 40'.$$

Оскільки:  $I_{Xc} > I_{Yc}$ , то  $I_u$  буде максимальним.

8. Визначаємо головні моменти інерції перерізу, тобто знайдемо моменти інерції перерізу відносно осей  $u, v$ .

$$I_{\min}^{\max} = I_{u/v} = \frac{I_{Xc} + I_{Yc}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Xc} - I_{Yc})^2 + 4 \cdot I_{XcYc}^2};$$

$$I_{u/v} = \frac{5611,1 - 1282,4}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5611,1 - 1282,4)^2 + 4 \cdot (1417,3)^2} =$$

$$34450,0 \pm 2585,6;$$

$$I_u = I_{\max} = 7173,64 \text{ см}^4; \quad I_v = I_{\min} = -280,1 \text{ см}^4.$$

Після виконання всіх необхідних розрахунків виконується перевірка правильності виконання задачі.

На першому етапі перевірки повинна виконуватись рівність:

$$I_{Xc} + I_{Yc} = I_u + I_v.$$

Підставляємо числові значення у формулу:

$$5611,1 + 1282,4 = 7173,64 + (-280,1).$$

$$6893,54 = 6893,54$$

В ході другої частини перевірки повинна виконуватись наступна рівність:

$$I_{uv} = 0; \quad I_{uv} = \frac{I_{Xc} - I_{Yc}}{2} \sin 2\alpha + I_{XcYc} \cdot \cos 2\alpha.$$

Підставляємо числові значення в формулу:

$$I_{uv} = \frac{5607,6 - 1282,4}{2} \cdot (-0,55) + 1417,3 \cdot 0,836 = -1189,9 + 1184,9 = 0.$$

Також необхідно обчислити похибку розрахунків.

$$\Delta = \left| \frac{-1189,4 + 1184,9}{1184,9} \right| \cdot 100\% = 0,4\%$$

Значення похибки допускається до 5 %.

Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх заданих невідомих величин.

**Відповідь:**  $I_{Xc} = 5611,1 \text{ см}^4$ ;  $I_{Yc} = 1282,44 \text{ см}^4$ ;

$I_{XcYc} = 1417,5 \text{ см}^4$ ;  $\alpha = 16040^\circ$ .

## 2. Завдання для самостійного виконання

1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (додаток 2). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.
2. Вибрати допоміжні координатні осі.
3. Знайти координати центру ваги перерізу.

4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.
5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.
6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.
7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.
8. Визначити осьові моменти перерізу.
9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.
10. Виконати перевірку.

Таблиця 1.

№	№ профілів							Розміри		
	<b>I</b>	<b>H</b>	<b>C</b>	<b>L</b>	Лист I	<b>L</b>	<b>L</b>	a, мм.	b, мм.	c, мм.
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60

20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20
21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40
24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30

### **Самостійна робота студентів №4 Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів**

**Мета роботи:** Засвоїти методику визначення моменту інерції, та опору перерізу а також радіусу інерції перерізу балки, яка складається з трьох елементів прокатної сталі, та розв'язати задачу згідно свого варіанту по табл. 2.2..

#### **4.1 Приклад виконання роботи:**

Для поперечного перерізу, що складається із декількох фігур, необхідно:

- 1) накреслити переріз в відповідному масштабі, вказати всі необхідні розміри і вибрати осі. (При розрахунку всі необхідні дані потрібно брати із таблиці сортаменту);
- 2) визначити координати центра ваги;
- 3) обчислити осьові і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей;
- 4) знайти положення головних центральних осей інерції;
- 5) визначити моменти інерції відносно головних центральних осей;
- 6) зробити перевірку правильності виконання.

**Дано:** 1) Двутавр № 22; 2) Лист № 12; 3) Кутник нерівносторонній № 100/63/10.

Схема розташування фігур зображена на рис. 4.1

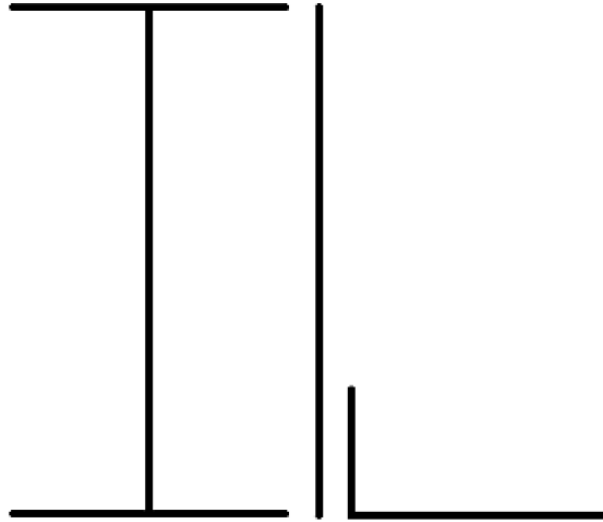


Рис.4.1. Схема розташування фігур

**Розв'язання**

1. Випишуємо необхідні дані із таблиці сортаменту (додаток
- 2) та зводимо значення параметрів профілю до єдиних одиниць виміру (см):

<b>Фігура 1 (двотавр) № 22:</b>	<b>Фігура 2 (лист) № 12:</b>	<b>Фігура 3 (кутник) № 100/63/10:</b>
$h_1 = 22 \text{ см};$ $b_1 = 11 \text{ см};$ $d_1 = 0,54 \text{ см};$ $F_1 = 30,6 \text{ см}^2;$ $I_{x1} = 2550 \text{ см}^4;$ $I_{y1} = 157 \text{ см}^4;$	$h_1 = 22 \text{ см};$ $b_1 = 1,2 \text{ см};$ $F_2 = 22 \cdot 1,2 = 26,4 \text{ см}^2;$	$h_3 = 6,3 \text{ см};$ $b_3 = 10 \text{ см};$ $d_3 = 1 \text{ см};$ $I_{\text{min}} = 28,3 \text{ см}^4;$ $F_3 = 15,5 \text{ см}^2$ $I_{x3} = 47,1 \text{ см}^4;$ $I_{y3} = 154 \text{ см}^4;$ $X_0 = 3,4 \text{ см};$ $Y_0 = 1,58 \text{ см};$ $\text{tg} \alpha = 0,387$ $\alpha = 21,15^\circ$

2. Креслимо переріз на міліметровому папері, вказуємо всі розміри і вибираємо осі координат з початком в точках  $C_1, C_2, C_3$  – центрах ваги (рис. 2.15).

3. Визначаємо координати центру ваги всієї фігури. За початок координат приймаємо центр ваги двотавра  $C_1$  і проводимо осі  $X_1C_1Y_1$ .

Визначаємо координати центрів ваги простих фігур відносно цієї системи координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 & \begin{cases} x_1 = 0; \\ y_1 = 0; \end{cases} \\ \mathbf{C}_2 & \begin{cases} x_2 = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} = \frac{11}{2} + \frac{1,2}{2} = 6,1\text{см}; \\ y_2 = 0; \end{cases} \\ \mathbf{C}_3 & \begin{cases} x_3 = \frac{b_1}{2} + b_2 + x_0 = \frac{11}{2} + 1,2 + 3,4 = 5,5 + 1,2 + 3,4 = 10,1\text{см}; \\ y_3 = -\left(\frac{h_1}{2} - y_0\right) = -\left(\frac{22}{2} - 1,58\right) = -(11 - 1,58) = -9,42\text{см}; \end{cases} \end{aligned}$$

Визначаємо координати  $X_c Y_c$  центра ваги складної фігури в системі координат  $X_1 C_1 Y_1$ .

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{\sum S_Y}{\sum F} = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0 \cdot 30,6 + 6,1 \cdot 26,4 + 10,1 \cdot 15,5}{30,6 + 26,4 + 15,5} = 4,38\text{см}; \\ Y_c &= \frac{\sum S_X}{\sum F} = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0 \cdot 30,6 + 0 \cdot 26,4 + (-9,42) \cdot 15,5}{30,6 + 26,4 + 15,5} = -2,01\text{см}. \end{aligned}$$

Введемо нову систему координат. Координати центрів ваги простих фігур відносно центру ваги складної фігури:  $X_c Y_c$  з початком в точці С (центром ваги системи тіл). В координатній системі  $X_c Y_c$  точки мають такі значення.

по осі х:  $l_1 = -4,38$  см;  $l_2 = 1,72$  см;  $l_3 = 5,72$  см.

по осі у:  $a_1 = 2,01$  см;  $a_2 = 2,01$  см;  $a_3 = -7,41$  см;

4. Визначаємо осьові і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей  $X_c Y_c$ .

$$\begin{aligned} I_{X_c} &= I_{X_1} + a_1^2 \cdot F_1 + I_{X_2} + a_2^2 \cdot F_2 + I_{X_3} + a_3^2 \cdot F_3 = \\ &= 2550 + 2,01^2 \cdot 30,6 + \frac{1,2 \cdot 22^3}{12} + 2,01^2 \cdot 26,4 + 47,1 + (-7,41)^2 \cdot 15,5 = 4743,27\text{см}^4; \\ I_{Y_c} &= I_{Y_1} + l_1^2 \cdot F_1 + I_{Y_2} + l_2^2 \cdot F_2 + I_{Y_3} + l_3^2 \cdot F_3 = \\ &= 157 + (-4,38)^2 \cdot 30,6 + \frac{22 \cdot 1,2^3}{12} + 1,72^2 \cdot 26,4 + 154 + 5,72^2 \cdot 15,5 = 1486,45\text{см}^4; \\ I_{X_c Y_c} &= I_{X_1 Y_1} + a_1 \cdot l_1 \cdot F_1 + I_{X_2 Y_2} + a_2 \cdot l_2 \cdot F_2 + I_{X_3 Y_3} + a_3 \cdot l_3 \cdot F_3 = \end{aligned}$$

$$= 0 + 2,01 \cdot (-4,38) \cdot 30,6 + 0 + 2,01 \cdot 1,72 \cdot 26,4 + \left( \frac{172,8 - 28,3}{2} \cdot \sin 2\alpha \right) +$$

$$+ (-7,41) \cdot 5,72 \cdot 15,5 = -941,87 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3 y_3} = \frac{I_{x_3} + I_{y_3} - I_{u_{\min}} - I_{v_{\min}}}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin 2\alpha;$$

$$I_{\max} = I_{x_3} + I_{y_3} - I_{\min}.$$

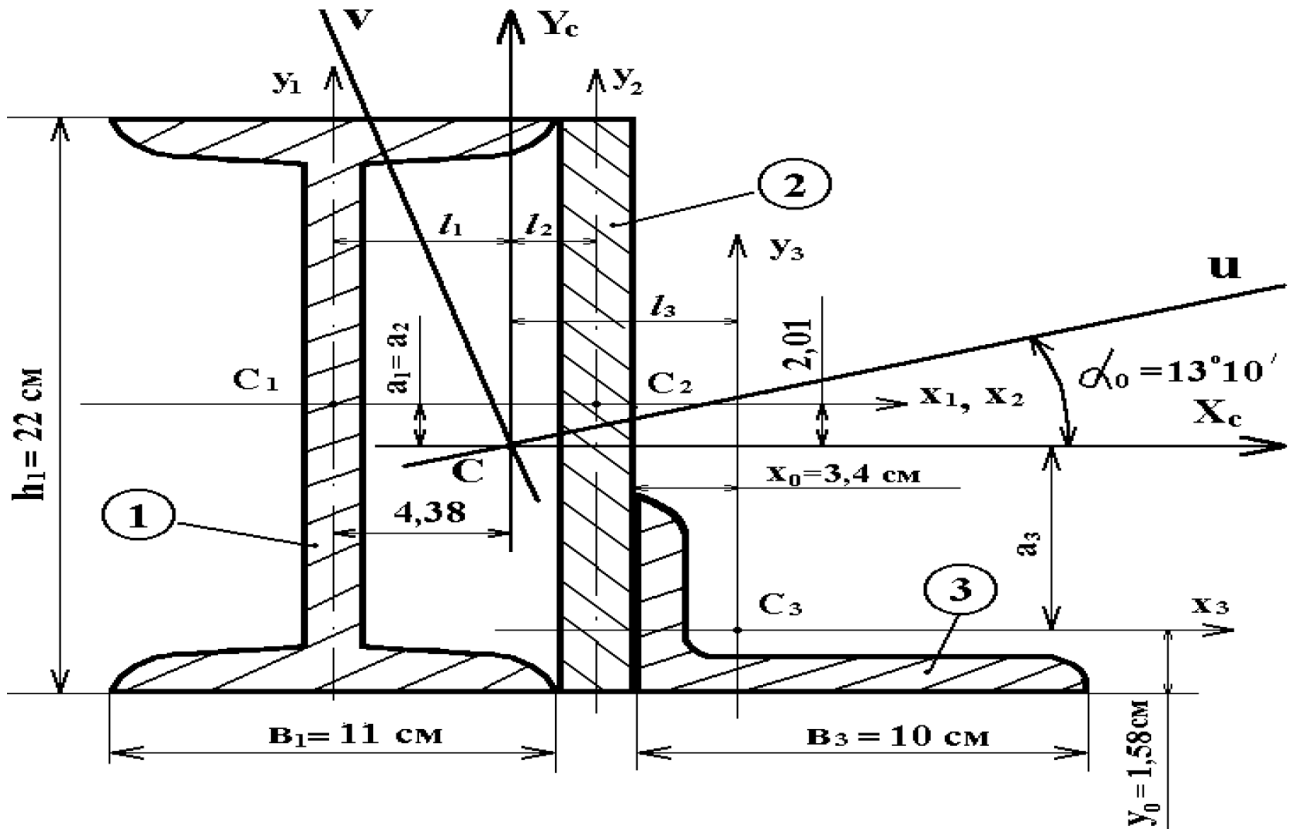


Рис. 4.2. Зображення плоского перерізу заданої схеми із зазначенням всіх необхідних позначень

5. Визначаємо положення головних центральних осей інерції:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{X_c Y_c}}{I_{Y_c} - I_{X_c}} = -\frac{2 \cdot (-941,87)}{1486,44 - 4743,27} = \frac{1883,74}{3256,83} = 0,5784;$$

$$2\alpha_0 = 30^\circ 04' \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 15^\circ 02'.$$

6. Визначаємо моменти інерції відносно головних центральних осей:



$$I_{\min}^{\max} = I_u = \frac{I_{X_C} + I_{Y_C}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{X_C} - I_{Y_C})^2 + 4 \cdot I_{X_C Y_C}^2} =$$

$$= \frac{4743,27 + 1486,44}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4743,27 - 1486,44)^2 + 4 \cdot (-941,87)^2} =$$

$$= 3114,85 \pm 1881,18;$$

$$I_{\max} = I_u = 3114,85 + 1881,18 = 4996,03 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_v = 3114,85 - 1881,18 = 1233,67 \text{ см}^4.$$

7. Перевірка:

а) 
$$I_{X_C} + I_{Y_C} = I_u + I_v;$$

$$4743,27 + 1486,45 = 4996,09 + 1233,68;$$

$$6229,72 \approx 6229,70$$

Похибка:

$$\Delta = \frac{6229,72 - 6229,70}{6229,71} \cdot 100\% = 0,3 \cdot 10^{-3}\%;$$

Допускається до 5%.

б) 
$$I_{uv} = \frac{I_{X_C} - I_{Y_C}}{2} \cdot \sin 30^{\circ}04' + I_{X_C Y_C} \cdot \cos 30^{\circ}04' = 0;$$

$$I_{uv} = \frac{4743,27 - 1486,44}{2} \cdot 0,5 + (-941,87) \cdot 0,866 = 0;$$

$$I_{uv} = 814,2 + 815,6 = 1,4;$$

Похибка складає:








$$\Delta = \frac{815,6 - 814,2}{815,6} \cdot 100\% = 0,17\%;$$

#### 4.2. Завдання для самостійного виконання

1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (додаток 2). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.
2. Вибрати допоміжні координатні осі.
3. Знайти координати центру ваги перерізу.
4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.

5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.
6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.
7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.
8. Визначити осьові моменти перерізу.
9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.
10. Виконати перевірку

Таблиця 2.1.

№	№ профілів							Розміри		
								a, мм.	b, мм.	c, мм.
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60
20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20
21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40

24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30

Таблица 2.2

ЗАДАЧА № 1			ЗАДАЧА № 2			ЗАДАЧА № 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
10	11	12	10	11	12	10	11	12
13	14	15	13	14	15	13	14	15
16	17	18	16	17	18	16	17	18

## Самостійна робота студентів №5

### Приклади виконання завдань для самостійного виконання

**Мета:** Оволодіти навиками рішення задач та побудови епюр для ступінчастого стрижня на який діють сили, які утворюють на його ділянках розтяг- стискання.

Центральний розтяг або стиск виникає у випадку, коли на стрижень діють навантаження, направлені паралельно його осі. При цьому в кожному перерізі за довжиною стрижня виникає внутрішнє зусилля (поздовжня сила, кН), яка направлена вздовж осі і стримує стрижень від руйнування. Процеси, які відбуваються при розтягу або стиску в більшості випадків є ідентичними, як і механічні характеристики дуже великої кількості пластичних конструкційних матеріалів. Тому ці протилежні види – розтяг і стиск – описують одними й тими ж математичними залежностями й об'єднують як один вид: розтяг–стиск. При вирішенні статично невизначених задач, слід звернути увагу на їх особливості. Тут використовуються такі основні положення: метод перерізів, рівняння рівноваги (статики), рівняння сумісності деформацій, умови міцності.

При цьому домовилися: все, що стосується розтягу (сили, напруження, деформації тощо) вважати зі знаком «+», а те, що стосується стиску – зі знаком «-».

Графіки, що показують, як змінюються внутрішнє зусилля при переході від перерізу до перерізу, називаються епюрами.

Правила побудови епюр:

1. Вісь, на який будується епюра (база), паралельна осі стрижня.
2. Ордината епюри відкладається від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихують епюри лініями, які перпендикулярні до бази.
4. Для зусиль вибирають певний масштаб, проставляють значення характерних ординат, в полі епюри ставлять знак зусилля.

### 1. Розрахунок ступінчастого стрижня на розтягання- стискання

**Умова задачі** Для заданого статично визначеного стрижня необхідно:

- 1) побудувати епюру поздовжніх сил ;
- 2) із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стрижня на кожній ступені;
- 3) побудувати епюру нормальних напружень;

4) визначити загальне подовження поперечних перерізів, прийнявши  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

Дано:  $P = 40$  кН;  $l = 40$  см = 0,4 м;  $[\sigma_p] = 160$  МПа;  $[\sigma_{,,}] = 100$  Мпа

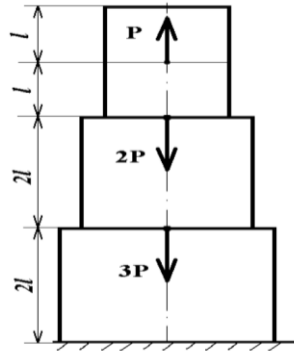


Рис. 1 Схема ступінчастого стрижня.

Розв'язання:

1. Визначаємо величину повздовжньої сили у характерних перерізах і будуємо епюру  $N$  (рис. 2):

$$N_{1-1} = N_{2-2} = 0 \text{ кН};$$

$$N_{3-3} = N_{4-4} = P = 40 \text{ кН};$$

$$N_{5-5} = N_{6-6} = P - 2P = 40 - 80 = -40 \text{ кН};$$

$$N_{7-7} = N_{8-8} = P - 2P - 3P = -4P = -4 \cdot 40 = -160 \text{ кН}.$$

2. Підбираємо площу поперечного перерізу стержня на кожному із його ступенів виходячи з умови міцності по нормальним напруженням:

$$F = \frac{N}{[\sigma]}$$

$$1, 2 \text{ ділянки } F_1 = \frac{N_{4-4}}{[\sigma]_p} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2,5 \text{ см}^2;$$

$$3 \text{ ділянка } F_2 = \frac{N_{6-6}}{[\sigma]_{ст}} = \frac{-40 \cdot 10^3}{-100 \cdot 10^6} = 4 \text{ см}^2;$$

$$4 \text{ ділянка } F_3 = \frac{N_{8-8}}{[\sigma]_{ст}} = \frac{-160 \cdot 10^3}{-100 \cdot 10^6} = 16 \text{ см}^2.$$

3. Визначаємо нормальні напруження у характерних перерізах і будуємо епюру (рис. 2)

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = 0;$$

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = \frac{40 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = \frac{40 \cdot 10^3}{4,0 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{7-7} = \sigma_{8-8} = \frac{160 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ МПа}.$$

4. Знайдемо загальне видовження (укорочення) стрижня і будуємо епюру переміщень по поперечних перерізах, прийняв, що  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

Епюра повного видовження або вкорочення будується від жорсткого защемлення.

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$$

$$\Delta l_1 = 0; \quad \Delta l_2 = \frac{N_{4-4} \cdot l}{E \cdot F_1} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,032 \text{ см};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_{6-6} \cdot 2l}{E \cdot F_2} = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,04 \text{ см}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_{8-8} \cdot l}{E \cdot F_3} = \frac{-160 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = -4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,04 \text{ см}$$

Повне вкорочення дорівнює:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0,032 - 0,04 - 0,04 = -0,048 \text{ см.}$$

## 2. Завдання для самостійного виконання

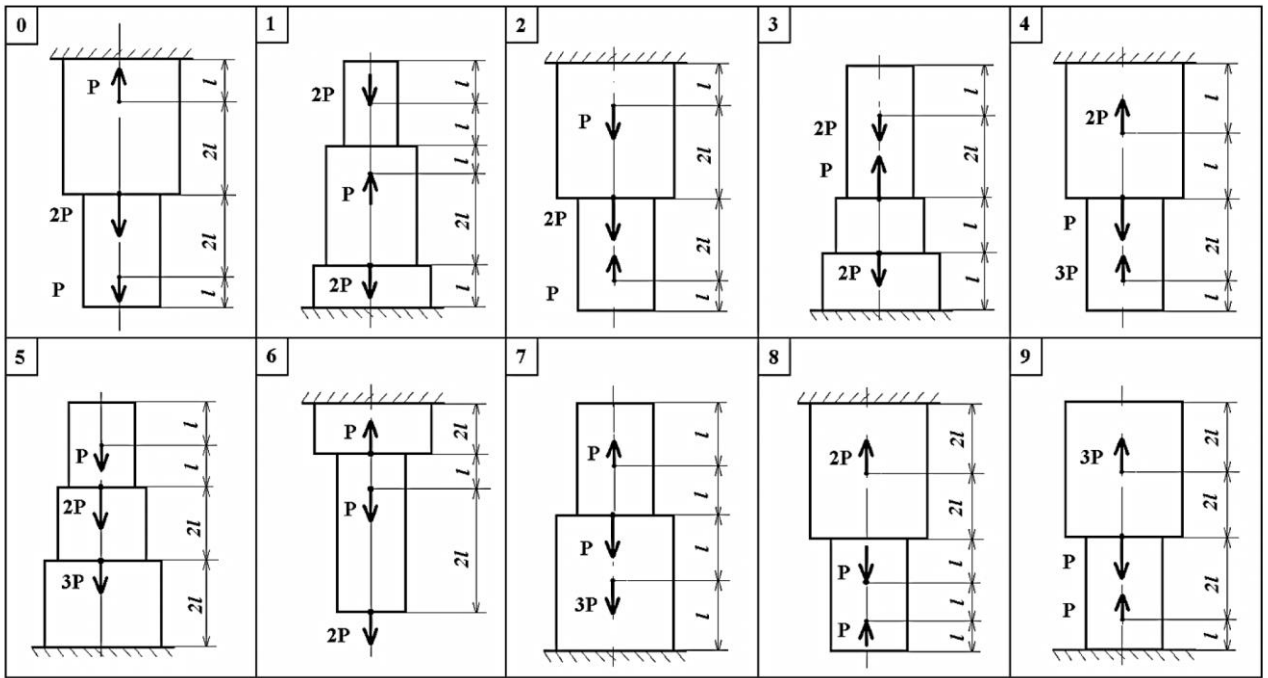
Для заданого статично визначеного стрижня необхідно: побудувати епюру поздовжніх сил; із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стрижня; побудувати епюру нормальних напружень; визначити загальне видовження поперечних перерізів, прийнявши  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

Жорстко закріпити вільний кінець стрижня, що розраховувався в першій частині задачі (з підібраними поперечними перерізами). Для отриманого статично невизначеного стрижня: розкрити статичну невизначеність; побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень та визначити загальне видовження або укорочення стрижня.

Таблиця.1

Варіанти завдань для виконання задачі

Параметри задачі	Числові варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P1, кН	40	50	65	40	80	55	60	45	50	30
P2, кН	90	55	70	50	60	70	80	35	55	45
P3, кН	100	60	35	65	70	90	70	30	70	85
a, м	0,3	0,4	0,5	0,3	0,9	0,1	0,3	0,7	0,8	0,4
b, м	0,2	0,4	0,3	0,8	0,1	0,2	0,4	0,6	0,9	0,2
c, м	0,1	0,3	0,6	0,7	0,3	0,3	0,4	0,5	0,7	0,3
[б]р, МПа	200	160	180	200	180	200	160	180	160	200
[б]ст, МПа	100	80	110	90	90	110	110	110	90	100



Завдання для виконання задачі 1

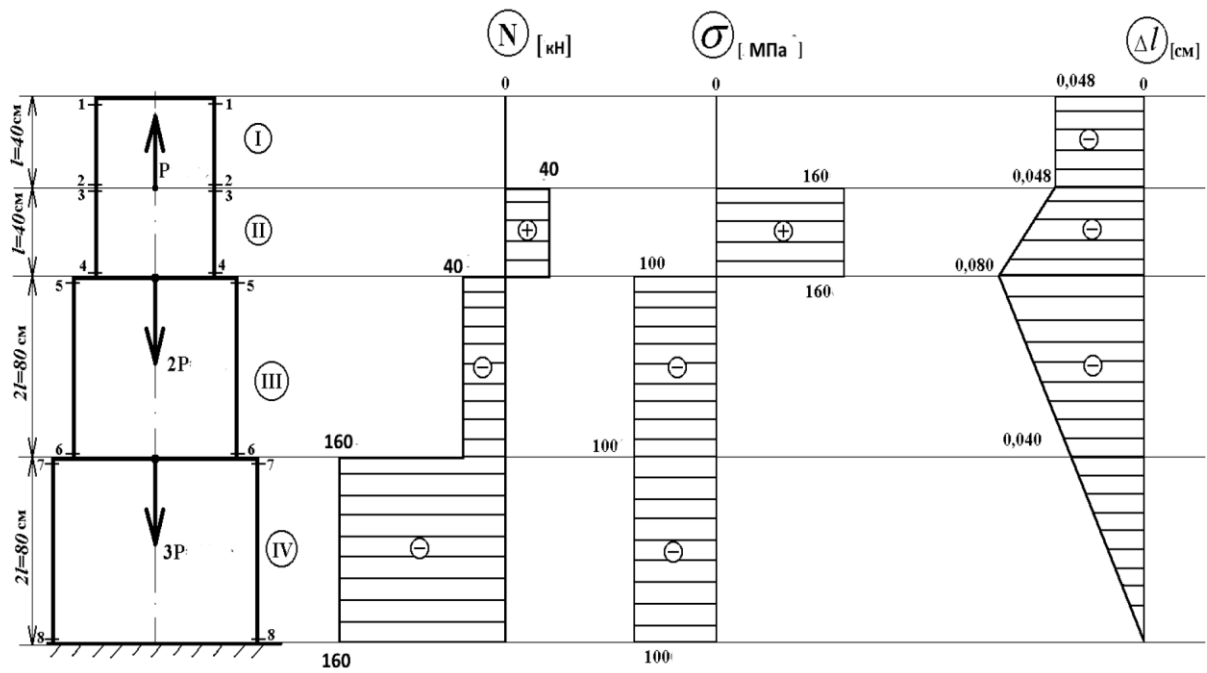


Рис. 2. Схема побудови епюр до задачі 2

:

**Будова епюр моментів кручення, визначення діаметрів валів із  
розрахунку на міцність**

**Мета роботи:** Засвоїти методику визначення моментів кручення при заданому значенні  $[\tau]$  визначити діаметр вала із розрахунку на міцність, побудува епюр.

**Приклад виконання роботи:**

На сталевий вал діють чотири моменти. Необхідно: 1) побудувати епюру моментів кручення; 2) при заданому значенні  $[\tau]$  визначити діаметр вала із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм; 3) побудувати епюру кутів закручування; 4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м).

Дано: Сталевий вал, схема якого зображена на рис. 5.23.

$$M_1 = 150 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_2 = 150 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_3 = 150 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_4 = 150 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$a = b = c = 150 \text{ см}; [\tau] = 550 \text{ МПа}, G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

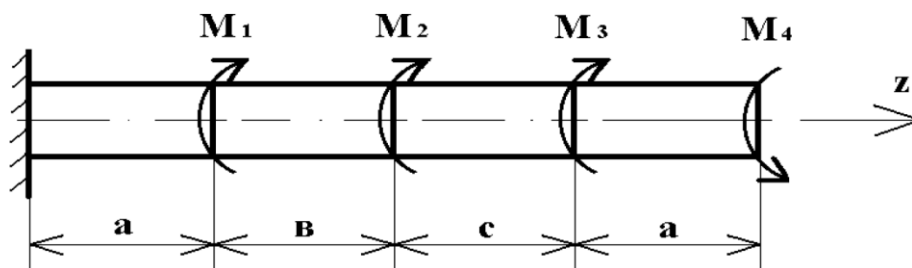


Рис. 5.23. Сталевий вал

1. Визначаємо значення моментів кручення на кожній ділянці валу та будуємо епюру (рис. 5.24.)

$$M_{1-1} = -M_4 = -150 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_{2-2} = -M_4 + M_3 = -150 + 150 = 0;$$

$$M_{3-3} = -M_4 + M_3 + M_2 = -150 + 150 + 150 = 150 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_{4-4} = -M_4 + M_3 +$$

$$M_2 + M_1 = -150 + 150 + 150 + 150 = 300 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$



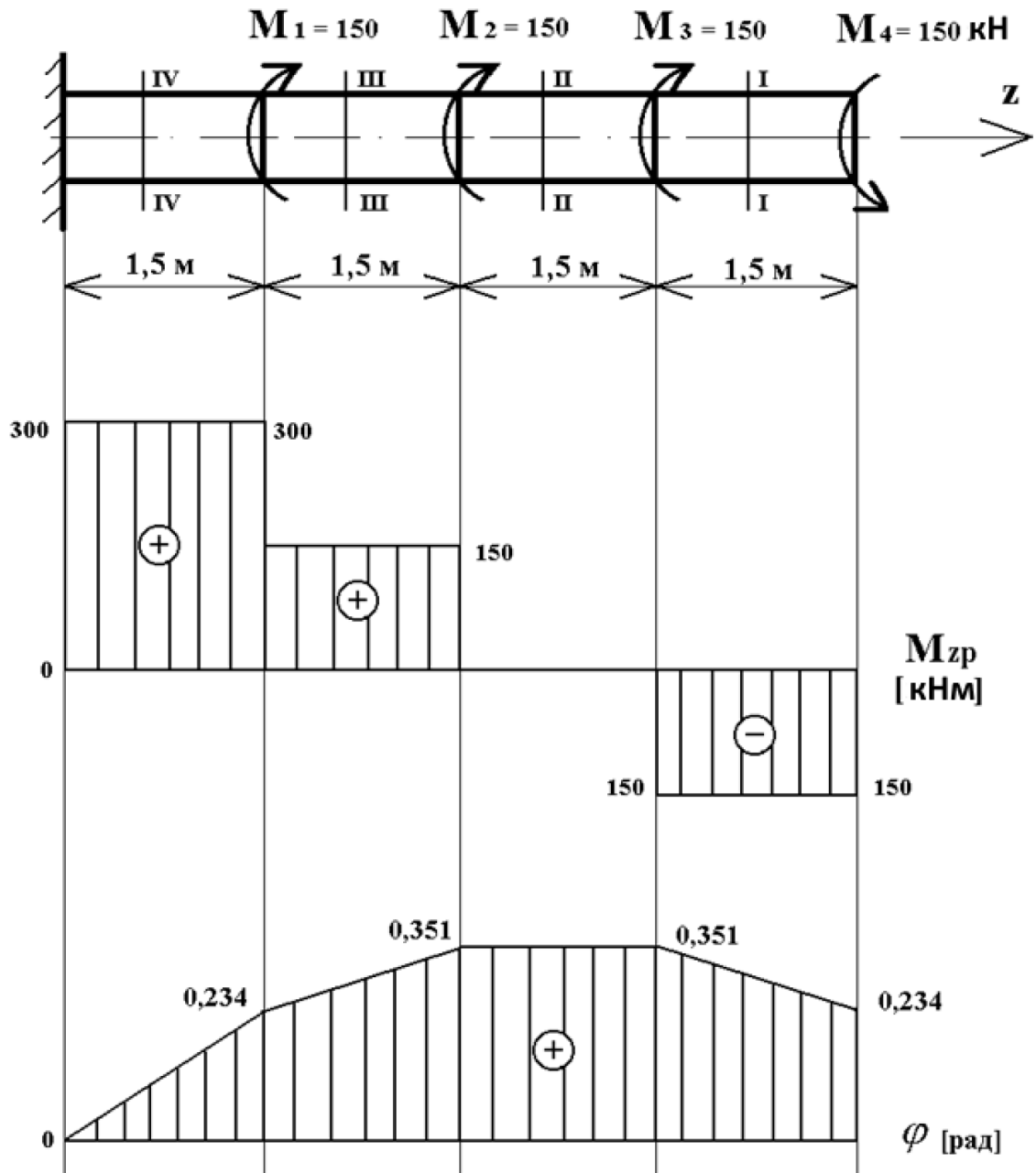


Рис.5.24. Схема сталюго валу з побудовою епюр

1. При заданому значенні  $[\tau]$  визначаємо діаметр валу:

$$W_{кр} = \frac{M_{кр}}{[\tau]} = \frac{300 \cdot 10^5}{550 \cdot 10^6} = 0,5454 \cdot 10^3 \text{ м}^3 = 545,5 \text{ см}^3$$

$$W_{кр} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,1 \cdot d^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{545,4}{0,1}} = \sqrt[3]{5454} = 17,6 \text{ см}$$

Приймаємо діаметр валу рівний 180 мм.

З похибки:  $\Delta = 17,6 - 18 / 17,6 \cdot 100\% = 2,23\%$ , допускається до 5%.

Тобто необхідно прийняти вал більшого діаметру із ряду:  $\varnothing = 180\text{мм}$ .

2. Визначаємо кути закручування і будуємо епюру (рис. 5.24):

$$\varphi_1 = \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_p} = \frac{-150 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot (0,18)^4} = -0,281 \text{ рад}; \quad \varphi_2 = 0;$$

$$\varphi_3 = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot (0,18)^4} = 0,281 \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot (0,18)^4} = 0,563 \text{ рад}$$

Загальний кут закручування складає:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -0,281 + 0 + 0,281 + 0,563 = 0,563 \text{ рад.}$$

Будуємо епюру кутів закручення відносно затиснення валу.

3. Визначаємо найбільший відносний кут закручення, який знаходиться на 5 ділянці :

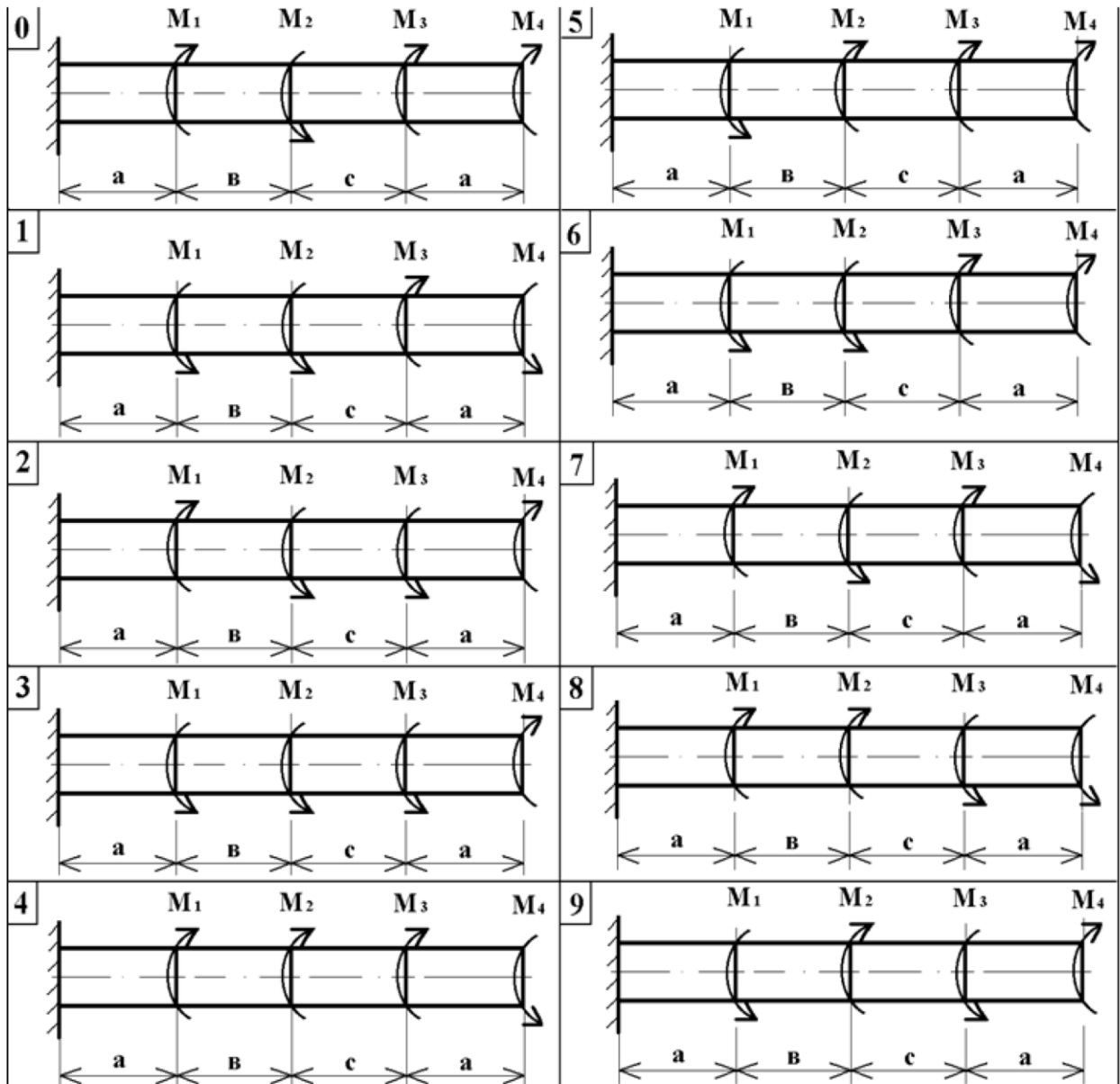
$$\theta = \frac{\varphi_4}{a} = \frac{0,563}{1,5} = 0,375 \text{ рад/м}$$

### ***Завдання для самостійного виконання***

На сталевий вал діють чотири моменти. Необхідно: 1) побудувати епюру моментів кручення; 2) при заданому значенні  $[\tau]$  визначити діаметр вала із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм; 3) побудувати епюру кутів закручування; 4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м).

## Завдання для самостійного виконання

№	a, м	b, м	c, м	M <sub>1</sub> , кНм	M <sub>2</sub> , кНм	M <sub>3</sub> , кНм	M <sub>4</sub> , кНм	[τ], МПа
1	1,1	1,1	1,1	110	110	110	110	35
2	1,2	1,2	1,2	120	120	120	40	
3	1,3	1,3	1,3	130	130	130	130	45
4	1,4	1,4	1,4	140	140	140	140	50
5	1,5	1,5	1,5	150	150	150	150	55
6	1,6	1,6	1,6	160	160	160	160	60
7	1,7	1,7	1,7	170	170	170	170	65
8	1,8	1,8	1,8	180	180	180	180	70
9	1,9	1,9	1,9	190	190	190	190	75
0	2,0	2,0	2,0	200	200	200	200	80



## Самостійна робота студента №7

## Розрахунок статично визначеної балки на згинання

**Мета роботи:** Засвоїти методику визначення умови міцності по нормальних напруженнях підібрати: а) діаметр  $d$  круглого поперечного перерізу; б) висоту  $h$  і ширину  $b$  прямокутного поперечного перерізу, прийнявши  $b = 0,5h$ ;

**Приклад виконання роботи:**

Для консольної балки необхідно: - визначити опорні реакції; - побудувати епюри поперечних сил і моментів згинання; - із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати: а) діаметр  $d$  круглого поперечного перерізу; б) висоту  $h$  і ширину  $b$  прямокутного поперечного перерізу, прийнявши  $b = 0,5h$ ; в) побудувати епюри нормальних і дотичних напружень в небезпечних перерізах.

Дано: балку розмірами  $a_1=1,5\text{ м}$ ;  $a_2 = 2\text{ м}$ ;  $l=5,5\text{ м}$ ;  $P=5\text{ кН}$ ;  $q=15\text{ кН/м}$ ;  
 $[\sigma]=10\text{ МПа}$

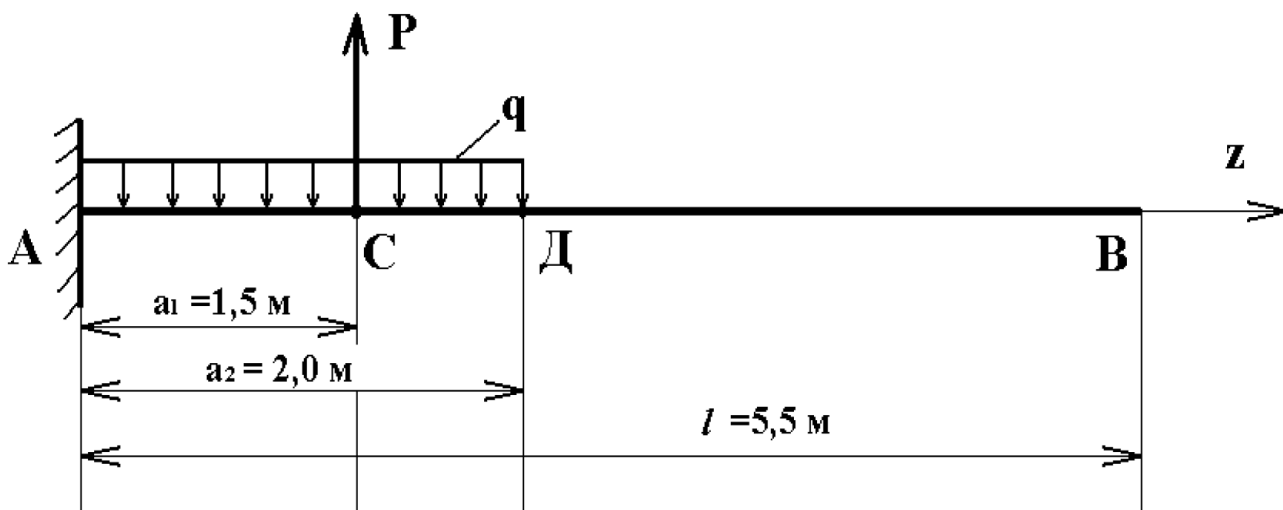


Рис.1. Схема до задачі

1. Визначаємо реакції опор за рівнянням рівноваги. В точці А маємо жорстке зацмлення. В точці жорсткого зацмлення маємо три складові реакції  $R_A$ ,  $Z_A$  і пару сил з моментом зацмлення  $M_A$  (реактивний момент).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma Z_1 = 0; \quad Z_A = 0 \\ \Sigma Y_1 = 0; \quad -R_A - P + q \cdot a_2 = 0 \\ \Sigma \Sigma M_{iA} = 0; \quad -q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} + P \cdot a_1 + M_A = 0 \end{array} \right.$$

Звідси визначаємо реакції:  $R_A = 25\text{ кН}$ ;  $M_A = 22,5\text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Поперечні сили у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$\begin{aligned} Q_{(Y)1} &= Q_{(Y)2} = Q_{(Y)3} = 0; \\ Q_{(Y)4} &= q \cdot 0,5 = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ кН}; \\ Q_{(Y)5} &= Q_{(Y)4} - P = 7,5 - 5 = 2,5 \text{ кН}; \\ Q_{(Y)6} &= q \cdot 2 - P = 15 \cdot 2 - 5 = 25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

2. Згинальні моменти у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$\begin{aligned} M_{(X)1} &= M_{(X)2} = M_{(X)3} = 0; \\ M_{(X)4} &= M_{(X)5} = - \left( q \cdot \frac{a_2}{4} \cdot \frac{a_2}{8} \right) = - (15 \cdot 0,5 \cdot 0,25) = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{(X)6} &= - \left( q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} \right) + P \cdot a_1 = - (15 \cdot 2 \cdot 1) + 0,5 \cdot 1,5 \\ &= -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

3. Із умови міцності по нормальним напруженням підбираємо:

А) балку круглого перерізу з діаметром  $d$ .

$$W_{кр} = \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2250 \text{ см}^3;$$

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3;$$

$$W_{кр} = 2250 = W = 0,1 \cdot d^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{2250}{0,1}} = \sqrt[3]{22500} = 28,2 \text{ см}$$

Б) балку прямокутного поперечного перерізу, прийнявши  $b = 0,4 \cdot h$ .

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,4 \cdot h^3}{6}; \quad W_{кр} = 2250 \text{ см}^3;$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{W_{кр} \cdot 6}{b}} = \sqrt[3]{\frac{2250 \cdot 6}{0,4}} = 32,3 \text{ см}$$

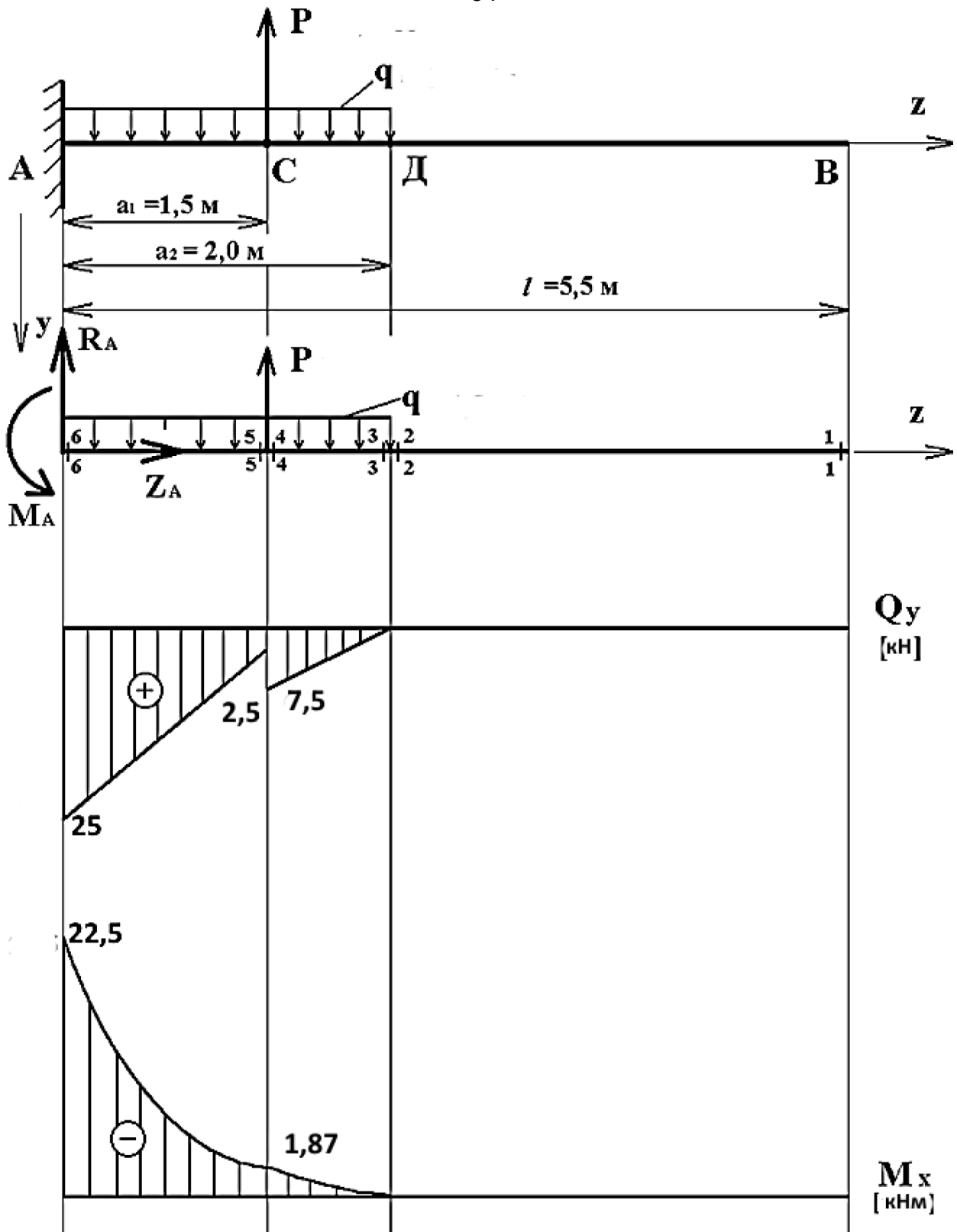


Рис. 2. Побудова епюр

4. Будемо епюру нормальних і дотичних напружень в перерізах з максимальним значенням моменту  $M_{\max}$  і максимальним значенням поперечної сили  $Q_{\max}$ . Таким перерізом виявився переріз в точці 6.

А) для круглого поперечного перерізу:

Нормальні напруження :

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot d^3} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot (0,282)^3} = 10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа}.$$

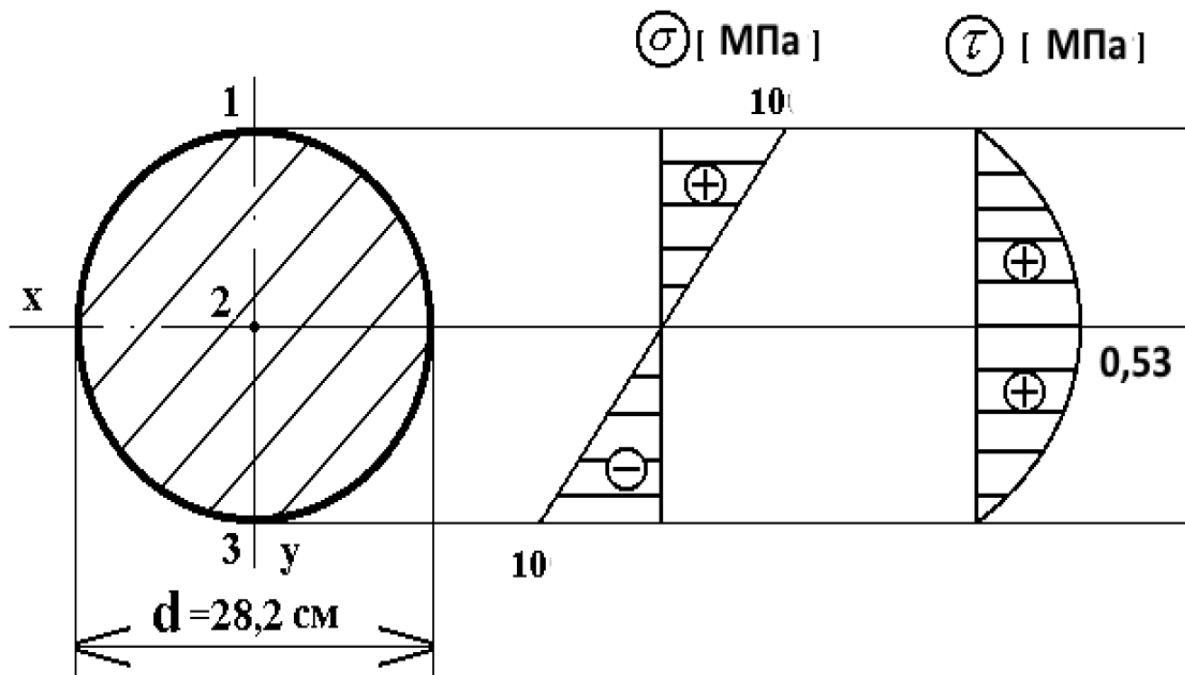


Рис.3. Побудова епюр для круглого поперечного перерізу

Дотичні напруження :

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b}$$

$$\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0; \quad \tau_{(2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (0,282)^2} = 0,53 \text{ МПа}$$

Б) для квадратного поперечного перерізу:

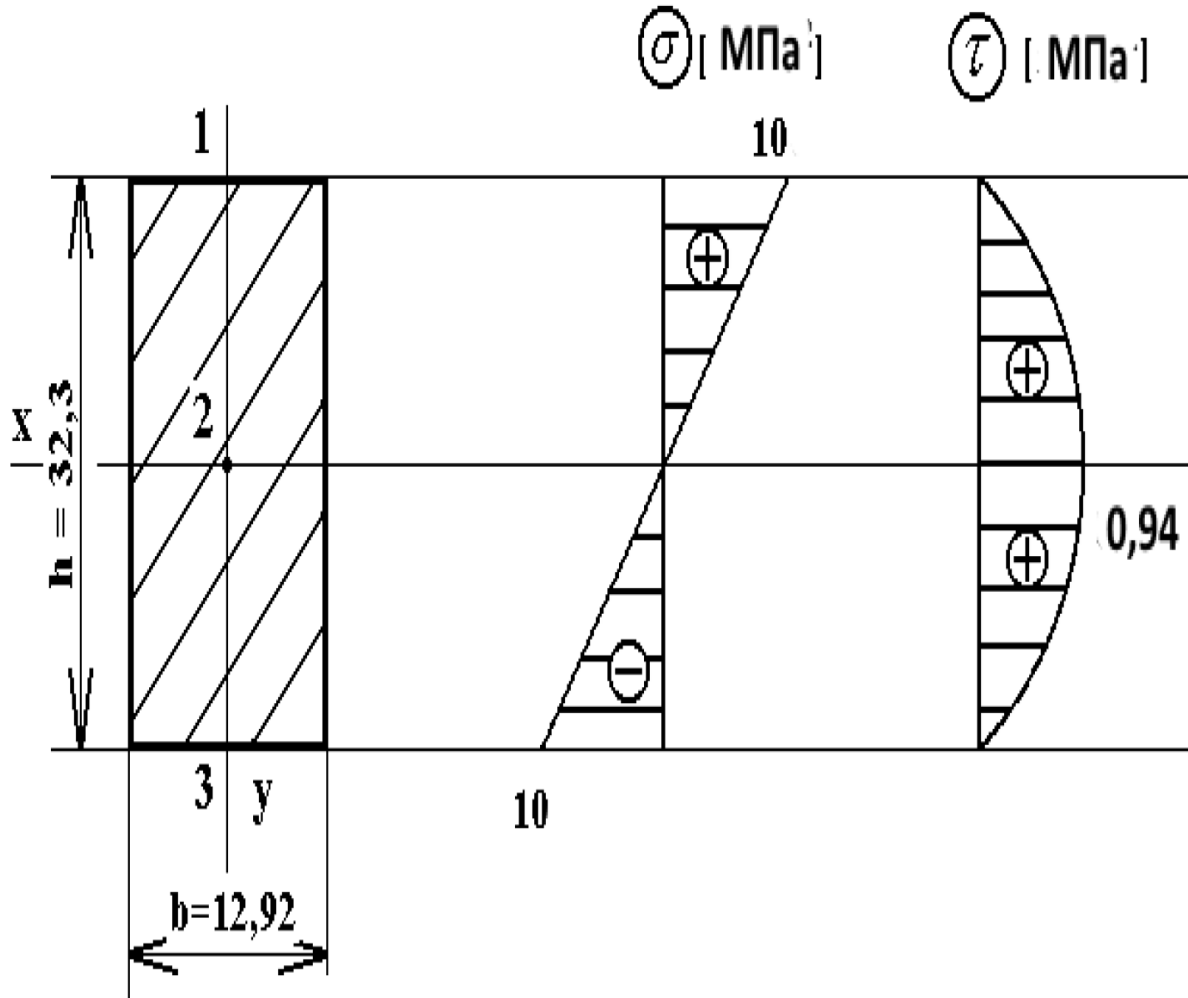


Рис.4. Побудова епюр для квадратного поперечного перерізу

Нормальні напруження:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot d^3} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot (0,282)^3} = 10 \text{ МПа}; \quad \sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа}$$

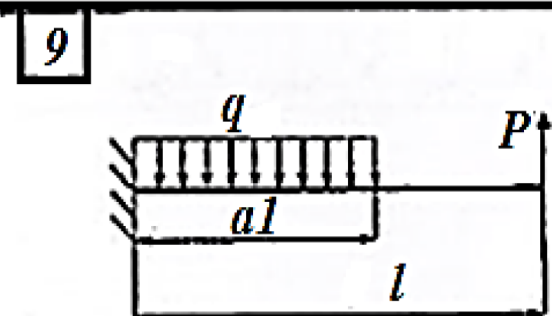
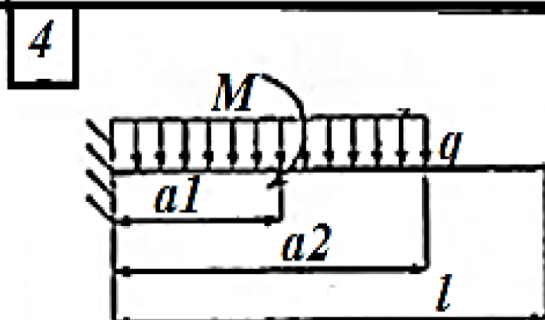
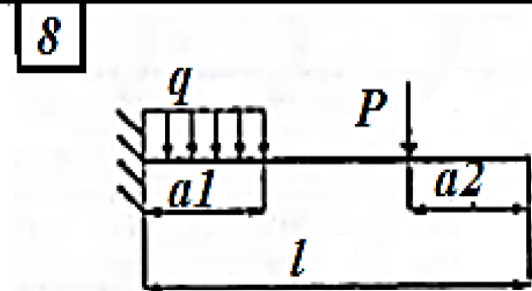
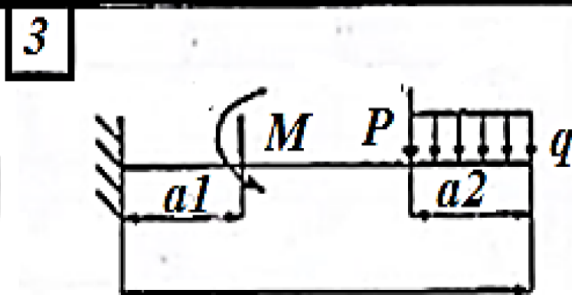
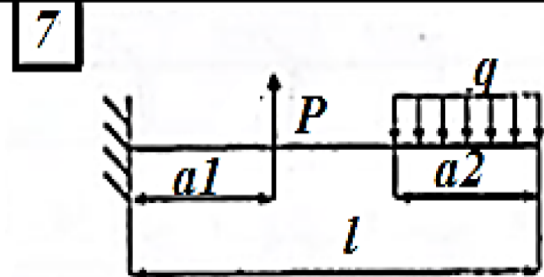
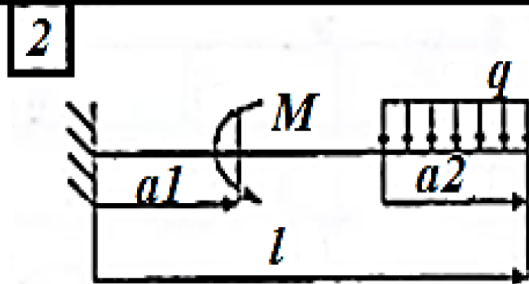
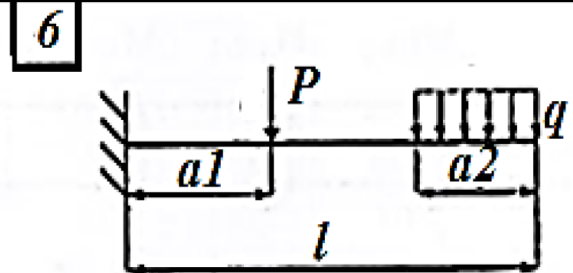
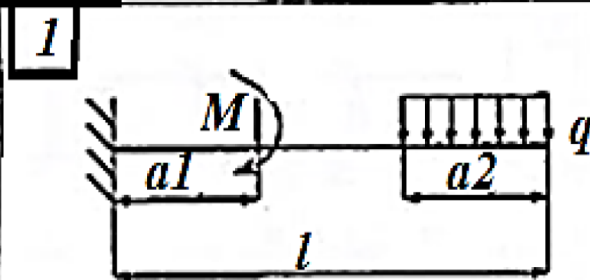
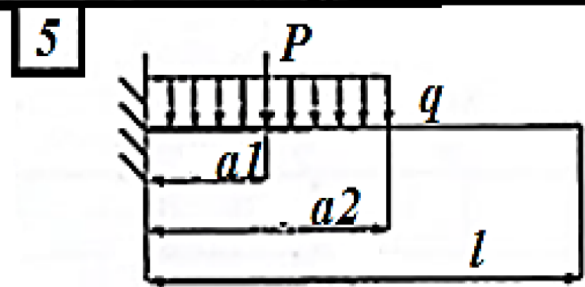
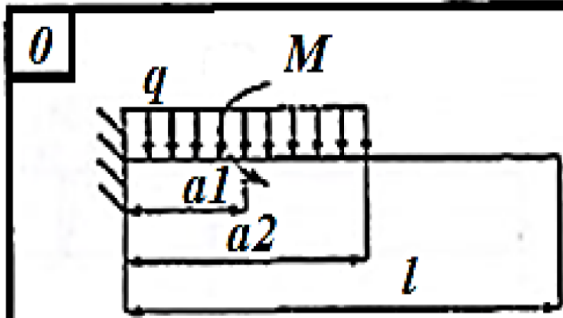
Дотичні напруження:

$$\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0;$$

$$\tau_{(2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{b \cdot h} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,1292 \cdot 0,323} = 0,94 \text{ МПа}$$



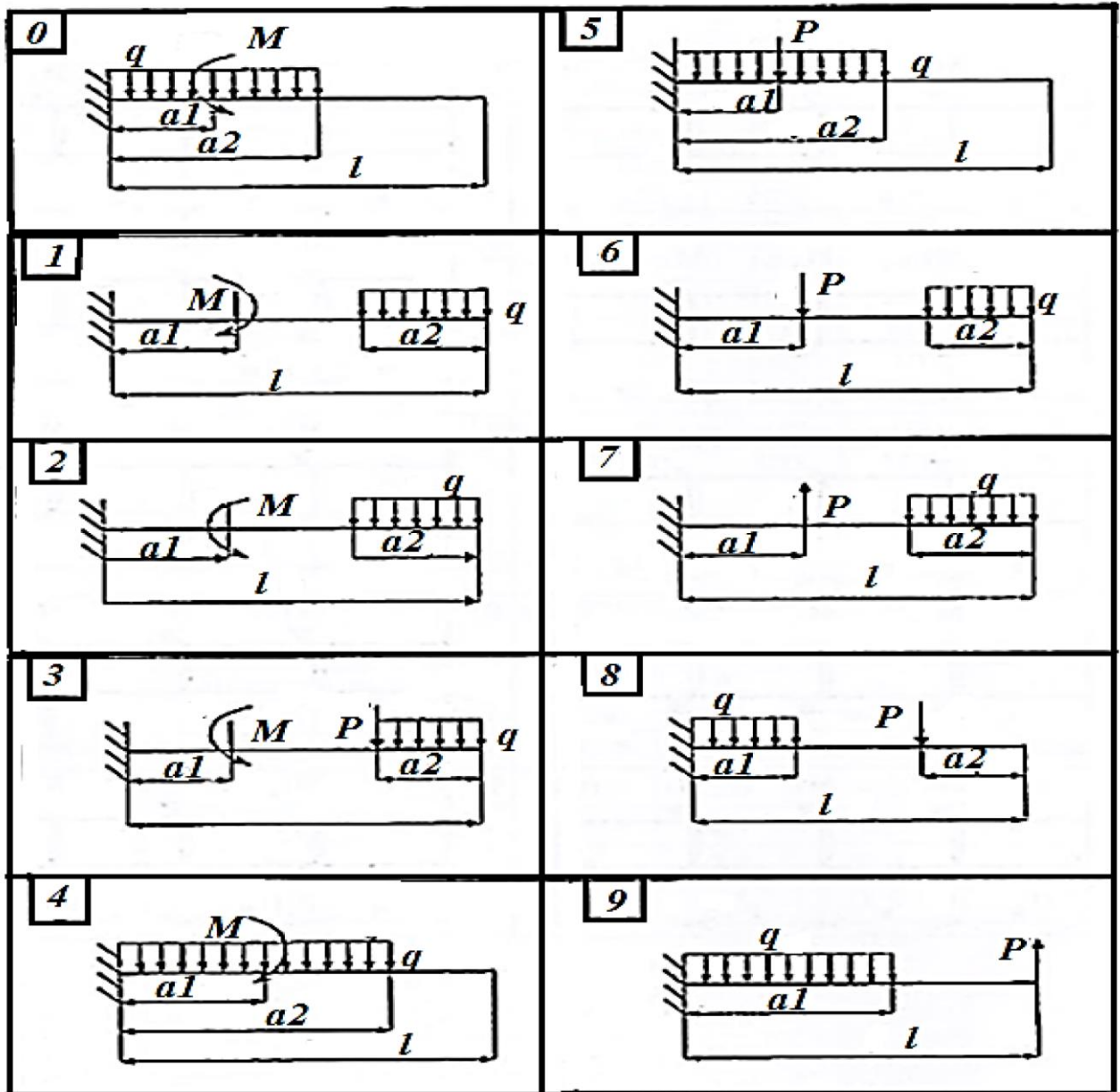
## Завдання для самостійного виконання



## Варіанти завдань для самостійного виконання

№	L,m	a <sub>1</sub> ,m	a <sub>2</sub> ,m	M, кН·м	P, кН	Q, кН/м	[σ], МПа
1	5,0	1,0	2,0	10	5	5	12
2	4,0	1,5	1,5	20	10	10	10
3	3,5	1,0	1,5	3	3	3	8
4	4,5	2,0	1,0	4	4	4	12
5	5,5	1,5	2,0	5	5	5	10
6	5,0	2,0	1,5	6	6	6	8
7	4,5	2,0	0,5	7	7	7	12
8	4,0	1,0	1,0	8	8	8	10
9	3,0	1,8	0,9	9	9	9	8
10	4,5	1,5	1,5	10	10	10	12

## 6.4.5. Завдання для самостійного виконання



Таблиця 6.1.

## Варіанти завдань для самостійного виконання

№	L, m	$a_1$ , m	$a_2$ , m	M, кН·м	P, кН	Q, кН/м	$[\sigma]$ , МПа
1	5,0	1,0	2,0	10	5	5	12
2	4,0	1,5	1,5	20	10	10	10
3	3,5	1,0	1,5	3	3	3	8
4	4,5	2,0	1,0	4	4	4	12
5	5,5	1,5	2,0	5	5	5	10
6	5,0	2,0	1,5	6	6	6	8
7	4,5	2,0	0,5	7	7	7	12
8	4,0	1,0	1,0	8	8	8	10
9	3,0	1,8	0,9	9	9	9	8
10	4,5	1,5	1,5	10	10	10	12

Навчальне видання

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

для виконання самостійних робіт з дисципліни „Теоретична механіка та механіка матеріалів і конструкцій " ОС «Бакалавр» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної та заочної форм навчання

Кафедра технічного сервісу

Укладач: Бондарев Сергій Григорович.

Редактор

Відповідальний за випуск: Бондарев С.Г.

Суми, РВВ, Сумський національний аграрний університет, вул. Кірова, 160

---

Підписано до друку;

2023 р. Формат А5: Гарнітура Arial

Тираж 100 примірників.

Умовних друкованих аркушів. Замовлення

Ум. друк. арк. 2,5