МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

СУМСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра технічного сервісу

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних та практичних робіт

у двох частинах (Ч. 1 та Ч. 2)

«Теоретична механіка та механіка матеріалів і конструкцій»

(Мех. 1, Мех. 1 с.т., ЗМех)

для студентів ОС «Бакалавр» спеціальності
208 «Агроінженерія»
денної та заочної форм навчання

СУМИ 2023

УДК 001.891:656.13

Укладач: Бондарев С.Г., к.т.н., доцент, кафедри технічного сервісу.

Методичні вказівки для виконання лабораторних та практичних робіт з дисципліни «Теоретична механіка та механіка матеріалів і конструкцій» у двох частинах, для студентів 1 курсу. ОС «Бакалавр» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної та заочної форм навчання. - Суми, 2023. – 62 с.

В методичних вказівках розглянуто методологію вирішення типових задач з теоретичної механіки, зокрема рівноваги тіл, та системи тіл під дією плоскої системи довільних сил, плоских ферм, тертя ковзання з розділу статики. З курсу механіки матеріалів і конструкцій структурно розглянуто задачі, пов’язані з визначенням геометричних характеристик плоских геометричних перерізів балок зварених з двох та понад фігур із сортаменту прокатної сталі, деформації стрижнів, деформованим станом у точці, та теорії міцності з подальшим призначенням стандартизованого прокату.

Рецензенти: Тарельник В.Б. д.т.н., проф., завідувач кафедри “Технічний сервіс”

Зубко В.М. д.т.н., проф, декан інженерно-технологічного факультету.

Відповідальний за випуск: Бондарев С.Г., доцент кафедри “Технічний сервіс”.

Рекомендовано до друку Методичною радою інженерно-технологічного факультету СНАУ.

Протокол № 6 від "22" травня 2023 р.

© Сумський національний аграрний університет, 2023

© Бондарев С.Г., 2023

Теоретична механіка (розділ «Статика»)
Частина 1

Лабораторна робота №1. Збіжна система сил.

Мета: розвиток навичок розв`язання задач на рівновагу збіжної системи сил, закріплення вміння знаходити проекції векторів сил на вісі.

Приклад 1. Визначити натягнення тросів $\boldsymbol{F_B}$ і $\boldsymbol{F_C}$, на яких підвішений вантаж вагою $\boldsymbol{F_G}$ (рис. 1). Троси АВ і АС нахилені до горизонталі під кутами $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$, як це показано на малюнку.

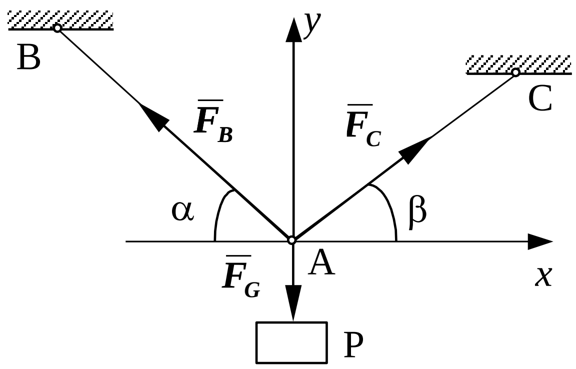


рис. 2.12

Рішення.

Розглядаємо рівновагу вузла **А**. Фізично це може бути якесь кільце або втулка, з якою пов'язані троси **АВ, АС**, і трос, на якому підвішений вантаж **Р**. На цей вузол діють три сили: шукані сили натягнення $\boldsymbol{F_B}$, $\boldsymbol{F_C}$ і сила натягнення троса, на якому підвішений вантаж. Остання сила, очевидно, дорівнюватиме вазі вантажу $\boldsymbol{F_G}$. З умов рівноваги

$$\sum F_{kx} = F_C \cos\beta - F_B \cos\alpha = 0,$$
$$\sum F_{ky} = F_B \sin\beta + F_C \sin\alpha - F_G = 0$$

находимо $F_B = F_G \cos\beta / \sin(\alpha+\beta)$, $\quad F_C = F_G \cos\alpha / \sin(\alpha+\beta)$.

Приклад 2. Флагшток **АО** закріплено на трьох розтяжках **АВ, АС, AD** (рис. 2.13). Конструкція встановлюється за допомогою натягнення вручну каната **АВК**, протягнутого через кільце **В**. Визначити зусилля в канатах **АС** і **AD** і в стержні **АО** залежно від натягнення $\boldsymbol{F_Q}$.

Рішення.

Розглядаємо рівновагу вузла **A**. Вважаємо, що усі сили, які діють на вузол, спрямовані від вузла. Якщо в результаті розрахунків виявиться, що якісь з сил мають знак "мінус", то це означатиме, що відповідні стержні працюють на стискування.

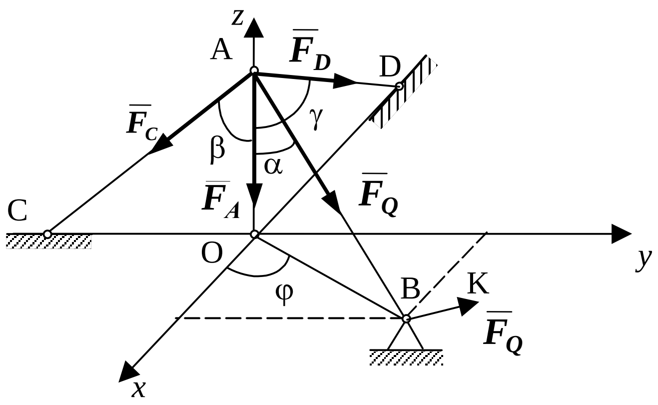


рис. 2.13

З умови рівноваги сил

$$\sum F_{kx} = F_Q \sin\alpha\cos\varphi - F_D \sin\gamma = 0,$$
$$\sum F_{ky} = F_Q \sin\alpha\sin\varphi - F_C \sin\beta = 0,$$
$$\sum F_{kz} = -F_A - F_C\cos\beta - F_D\cos\gamma - F_Q\cos\alpha = 0$$

визначаємо:

$$F_D = F_Q \sin\alpha\cos\varphi / \sin\gamma, \qquad F_C = F_Q \sin\alpha\sin\varphi / \sin\beta,$$
$$F_A = -F_Q\left[\cos\alpha + \sin\alpha\left(\sin\varphi ctg\beta + \cos\varphi ctg\gamma\right)\right].$$

Знак мінус для $\boldsymbol{F_A}$ означає, що розпорка **AO** (флагшток) працює на стискання.

Приклад 3. Драбина AB довжиною 12 метрів важить 300 Н. Вона приставлена до вертикальної стіни і знаходиться на горизонтальній підлозі, як показано на *Рис. 10(a)*. Чому має дорівнювати коефіцієнт тертя f для рівноваги?

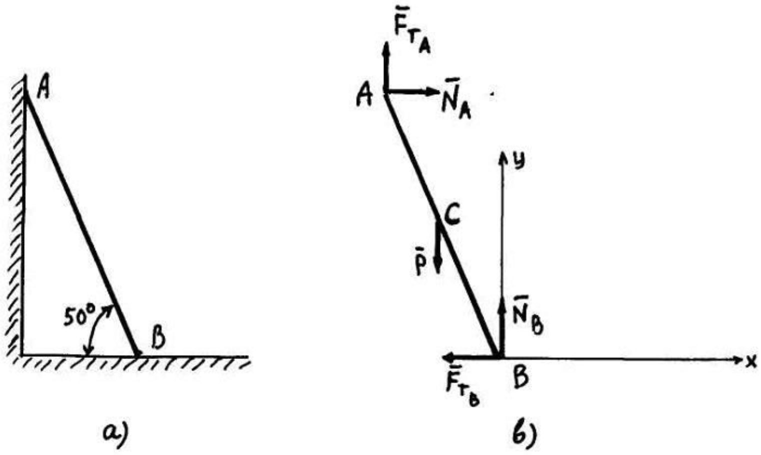


Рис. 10

Розв'язок

Об'єкт рівноваги показано на *Рис. 10(б).* До нього прикладена $P = 300\,H$ в центрі драбини, а також реакції в т. A і B. В цих точках прикладені граничні величини сил тертя F_{T_A} і F_{T_B}. $F_{T_A} = f\,N_A$ і $F_{T_B} = f\,N_B$.

Складемо рівняння рівноваги для драбини AB:

$$1)\ \sum F_{i_x} = 0;\quad N_A - f\,N_B = 0;$$

$$2)\ \sum F_{i_y} = 0;\quad N_B + f\,N_A - P = 0;$$

$$3)\ \sum M_{i_A} = 0;\quad -300\cdot 6\cos 50^0 - f\,N_B\cdot 12\sin 50^0 + N_B\cdot 12\cos 50^0 = 0.$$

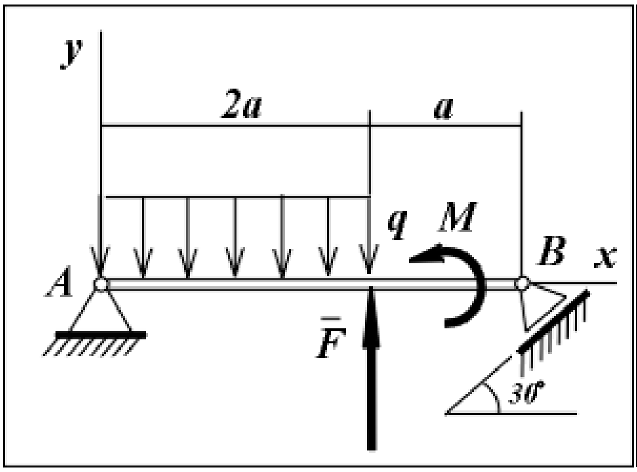
Підставляючи значення N_A з першого рівняння в друге, знаходимо: $N_B = \dfrac{300}{1+f^2}$. Використовуючи знайдене значення N_B в третьому рівнянні, одержуємо: $-300\cdot 6\cos 50^0 + \dfrac{300}{1+f^2}\cdot 12\cos 50^0 - \dfrac{300}{1+f^2}f\cdot 12\sin 50^0 = 0$

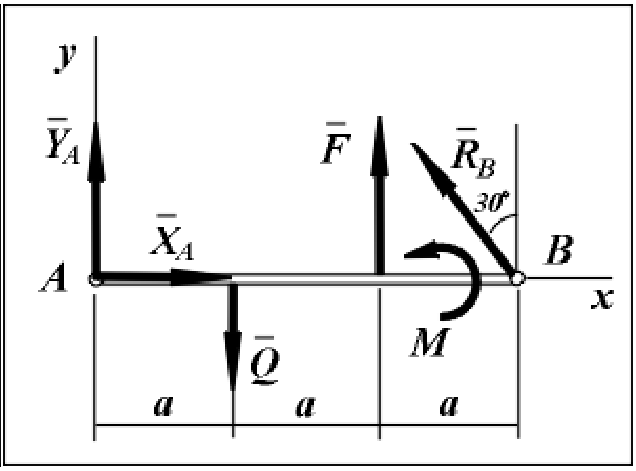
Звідки маємо: $f = 0{,}36$.

Лабораторна робота №2 Рівновага тіла під дією плоскої системи сил

Мета: надбання навичок розрахунку балок в контексті визначення навантаження на її елементи.

Умова задачі: Визначити реакції шарнірних опор A и B балки, що перебуває під дією зосередженої сили F = 60 Н, рівномірно розподіленого навантаження з інтенсивністю q = 15 Н/м і пари сил з моментом M =40 Нм; відстань a = 1 м.





Рішення. Уведемо систему координат O_{xy}, сполучивши початок координат O с нерухливим шарніром A и направивши вісь O_x уздовж балки.

Для визначення опорних реакцій розглянемо рівновагу балки. До неї прикладені активні сили: **F**, пари сил з моментом M и рівномірно розподілене навантаження. Замінимо розподілене навантаження її рівнодіючої **Q**, рівної по модулі Q = q · 2a = 30 Н и прикладеній в середній точці ділянки її дії.

На балку накладені два зв'язки: нерухлива шарнірна опора в крапці A и рухлива шарнірна опора (ковзанка) у крапці B. Відкинемо подумки ці зв'язки, замінивши їхніми відповідними реакціями. Реакція $\mathbf{R}_A$ невідома по величині й напрямку, тому розкладемо її на дві невідомі по величині складові $\mathbf{X}_A$,$\mathbf{Y}_A$, спрямовані по координатних осях. Опора в крапці B не перешкоджає її переміщенню уздовж похилої площини й, отже, реакцію $\mathbf{R}_B$ варто направити перпендикулярно похилої площини, тобто ця реакція відома по напрямку, але невідома по величині.

Таким чином, у задачі є три невідомих скалярних величини: X_A, Y_A, R_B. Оскільки для довільної плоскої системи сил є три незалежних рівняння рівноваги, дана задача є статично визначеною.

Складемо рівняння рівноваги балки під дією плоскої системи сил, що містить задані активні сили й невідомі реакції зв'язків, у формі (II):

$\sum F_{ix} = 0$; $\sum M_A(\mathbf{F}_i) = 0$; $\sum M_B(\mathbf{F}_i) = 0$.

Ці рівняння рівноваги записуються в розглянутому прикладі в такий спосіб:

$\sum F_{ix} = X_A - R_B \sin 30° = 0$; (1)

$\sum M_A(\mathbf{F}_i) = - Q \cdot a + F \cdot 2a + M + (R_B \cos 30°) \cdot 3a = 0$; (2)

$\sum M_B(\mathbf{F}_i) = -Y_A \cdot 3a + Q \cdot 2a - F \cdot a + M = 0$. (3)

Ця форма рівнянь у цьому випадку володіє перевагою, що кожне із двох рівнянь моментів не містить реакцій, прикладених відповідно до моментів відносно крапок А и В (тому що їхні плечі щодо цих крапок дорівнюють нулю).

Нагадаємо, що алгебраїчні моменти сил беруться зі знаком плюс, якщо вони спрямовані проти ходу годинної стрілки. При обчисленні моменту реакції $\mathbf{R}_B$ щодо крапки А виділена її вертикальна складова, рівна $R_B \cos 30°$ і яка має плече 3a, а горизонтальна складова має нульовий момент щодо крапки А.

З рівнянь (2) і (3) знаходимо

$R_B = (Q - 2F - M/a)/(3\cos 30°) \approx -50.0$ Н;

$Y_A = (2Q - F + M/a)/3 \approx 13.3$ Н.

Отримане негативне значення R_B означає, що сила $\mathbf{R}_B$ спрямована протилежно тому напрямку, що показаний на малюнку.

Для перевірки можна скласти рівняння проекцій сил на вісь Оу, що повинне задовольнятися при знайдених значеннях Y_A і R_B:

$\sum F_{iy} = Y_A - Q + F + R_B \cos 30° = 13.3 - 30 + 60 - 43.3 = 0$.

З рівняння (1) знаходимо

$X_A = R_A \sin 30° \approx -25$ Н.

Знак мінус означає, що складова $\mathbf{X}_A$ у дійсності спрямована в негативному напрямку осі Ох.

Модуль реакції $R_A = (X_A^2 + Y_A^2)^{½} \approx 28.3$ Н.

Відповідь: Напрям реакції в точці А вибраний вірно, оскільки отриманий результат є позитивним і складає $R_A = 28.3$ Н

Лабораторна робота №3. Приклади розв'язування задач на рівновагу тіла під дією плоскої системи довільних сил

Мета: визначення реакцій в елементах балки за відомими зовнішніми навантаженнями.

Умова задачі:

Однорідна балка AB прямокутного перерізу вагою 400 [Н] має закріплений шарнір A, і опирається на точкову опору O (рис. 1.20). До другого кінця балки B підвішений вантаж вагою 200 [Н]. Довжина балки 4 [м], точкова опора розташована на відстані 3/4 довжини балки від шарнірної опори. Кут нахилу балки до горизонту складає α = 30°. Визначити реакції опор балки.

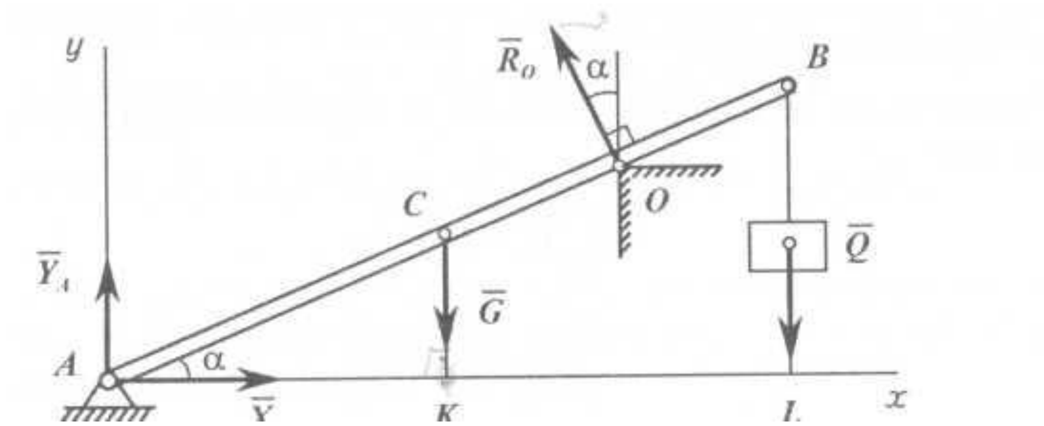


Рис. 1.20.

Розв'язання.

Складаємо розрахунково-силову схему задачі. Прикладемо до осі балки задані активні сили: силу тяжіння G самої балки та силу тяжіння 2 вантажу. Сила тяжіння балки $\dot{\bar{G}}$ прикладена посередині балки у точці C (оскільки балка однорідна) і спрямована вертикально донизу. Сила тяжіння вантажу $\dot{\bar{G}}$прикладена до кінця балки B і спрямована вертикально донизу.

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} P_{kx}=0,\\&\sum_{k=1}^{n} P_{ky}=0,\\&\sum_{k=1}^{n} m_A(\bar{P}_k)=0.\end{aligned}\right\}$$

Далі умовно звільняємо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в'язей. У точці А розміщена нерухома шарнірна опора, вона має дві складові реакції $\dot{\bar{X}}_A$ і $\dot{\bar{Y}}_A$, які розташовані вздовж відповідних осей координат. У точці О - точкова опора, яка має одну реакцію R_0, що напрямлена перпендикулярно до балки. Таким чином, балка знаходиться у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання цієї задачі використовуємо умови рівноваги (1.54):

Оскільки осі координат x і y задані за умовою задачі, то складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left.\begin{aligned}&X_A-R_o\sin\alpha=0,\\&Y_A-G-Q+R_o\cos\alpha=0,\\&-G\cdot\frac{AB}{2}\cos\alpha+R_o\cdot AO-Q\cdot AB\cos\alpha=0,\end{aligned}\right\}$$

де *AK* - плече сили G, AL - плече сили $\dot{\bar{Q}}$-

$$\left.\begin{aligned}&X_A-0{,}5R_o=0,\\&Y_A-400-200+0{,}866R_o=0,\\&-400\cdot2\cdot0{,}866+3R_o-200\cdot4\cdot0{,}866=0.\end{aligned}\right\}$$

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримаємо:

З третього рівняння обчислимо реакцію **R**o:

$$R_o=\frac{692{,}8+692{,}8}{3}=461{,}86\ [H],$$

$$X_A = \frac{1}{2} R_o = 230,93 \ [H],$$

$$Y_A = 400 + 200 - 0,866 \cdot 461,86 = 160,04 \ [H].$$

і підставимо її значення у перші два рівняння. Будемо мати:

Оскільки визначені дві складові реакції, які прикладені в точці А, $\dot{\bar{X}}_A$ та $\dot{\bar{Y}}_A$, то геометричним додаванням можна обчислити модуль повної реакції R_A:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{230,93^2 + 160,04^2} = \sqrt{78941,5} = 280,97 \ [H].$$

Таким чином, визначенні усі шукані реакції.

Відповідь: $R_A = 280,97 \ [H]$,

$R_o = 461,86 \ [H]$.

Приклад 2.

Визначити реакції опори однорідної балки АВ прямокутного перерізу, один кінець якої А жорстко закріплений у стіні, яка перебуває під дією зосередженої сили Р = 4,0 [kH], пари сил із моментом m = 2,0 [кН.м] та рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 1.5[\frac{\text{Кн}}{\text{м}}]$. Довжина балки АВ дорівнює 5 [м], рівномірно розподілене навантаження діє на ділянці 3 [м] від точки А. Кут нахилу зосередженої сили $\dot{\bar{P}}$ до горизонту складає α =30°, осі x та y показані нарис. 1.21.

Розв 'язання.

Складаємо розрахунково-силову схему. Покажемо всі сили, що прикладені до балки АВ. Насамперед, це задані активні сили - сила Р, що прикладена до кінця

$$Q = q \cdot AC = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \ [kH].$$

балки В і спрямована під кутом а до горизонту. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою (2, яка дорівнює:

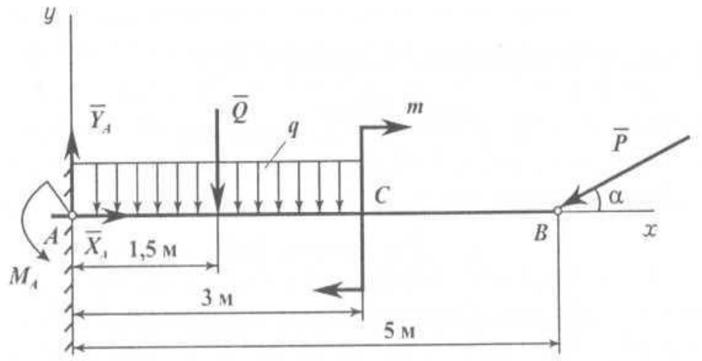


Рис. 1.21

Сила $\dot{\bar{Q}}$, прикладена посередині ділянки АС і спрямована у той же бік, що і саме навантаження, тобто вертикально донизу. Покажемо на силовій схемі пару сил, яка визначається моментом m.

Далі умовно звільняємо балку від в'язі і замінюємо її відповідними реакціями в'язі. У точці А - жорстке закріплення балки у стіні, а тому воно має дві складові реакції: $\dot{\bar{X}}_A$, $\dot{\bar{Y}}_A$, які розташовані вздовж відповідних осей координат, і реактивний момент M_A. Напрямок цього невідомого моменту показуємо на силовій схемі довільно, наприклад, проти напрямку стрілки годинника. Якщо ж при остаточному визначенні моменту M_A отримаємо від'ємний знак, то дійсний напрямок моменту - протилежний. Покажемо на силовій схемі лінійні розміри і осі координат.

Як видно з побудованої розрахунково-силової схеми, балка перебуває під дією плоскої системи довільних сил. Використовуємо умови рівноваги (1.54). А саме:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} P_{kx}=0,\\&\sum_{k=1}^{n} P_{ky}=0,\\&\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\overline{P}_k\right)=0.\end{aligned}\right\}$$

Складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left.\begin{aligned}&X_A-P\cos\alpha=0,\\&Y_A-Q-P\sin\alpha=0,\\&-Q\cdot\frac{AC}{2}-P\sin\alpha\cdot AB+M_A-m=0.\end{aligned}\right\}$$

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то

$$\left.\begin{aligned}&X_A-4{,}0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0,\\&Y_A-4{,}5-4{,}0\cdot\frac{1}{2}=0,\\&-4{,}5\cdot\frac{3}{2}-4{,}0\cdot\frac{1}{2}\cdot 5+M_A-2{,}0=0.\end{aligned}\right\}$$

отримаємо:

З першого рівняння обчислимо X_A :

$$X_A=4{,}0\frac{\sqrt{3}}{2} = 22\sqrt{3} = 3{,}46 \text{ [кН]}.$$

З другого рівняння обчислимо Y_A :

$$Y_A=4{,}5 + 4{,}0'1 = 6{,}50 \text{ [кН]}.$$

З третього рівняння обчислимо M_A :

$$M, =2{,}0 + 4{,}5\frac{3}{2} + 4{,}0\frac{1}{2}\text{-}5 = 2{,}0 + 6{,}75 + 10{,}0 = 18{,}75 \text{ [кН]}.$$

Оскільки складові реакцій X_A та Y_A, що прикладені у точці A, обчислені, то можна знайти модуль K_A повної реакції у точці A :

$$R_A= \sqrt{X^2 + Y^2;} = \sqrt{(3{,}46)2 + (6{,}5)2} = \sqrt{54{,}22} = 7{,}36 \text{ [кН]}.$$

Таким чином, визначені всі шукані реакції.

Відповідь: R_A =4,30 кН], M_A =18,75 [кН].

Лабораторна робота №4 Рівновага тіла під дією плоскої системи сил

Мета: опанувати методику знаходження сумарної реакції в опорах під дією плоскої системи сил на балку.

Визначити реакції опори однорідної балки АВ прямокутного перерізу, один кінець якої А жорстко закріплений у стіні, яка перебуває під дією зосередженої сили Р = 4,0 [kН], пари сил із моментом m = 2,0 [кН.м] та рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 1.5\ [\frac{\text{Кн}}{\text{м}}]$. Довжина балки АВ дорівнює 5 [м], рівномірно розподілене навантаження діє на ділянці 3 [м] від точки А. Кут нахилу зосередженої сили $\dot{\text{P}}$ до горизонту складає α =30°, осі х та у показані на рис. 1.

Розв 'язання.

Складаємо розрахунково-силову схему. Покажемо всі сили, що прикладені до балки АВ. Насамперед, це задані активні сили - сила Р, що прикладена до кінця

$$Q = q \cdot AC = 1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5\ [kH].$$

балки В і спрямована під кутом а до горизонту. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою (2, яка дорівнює:

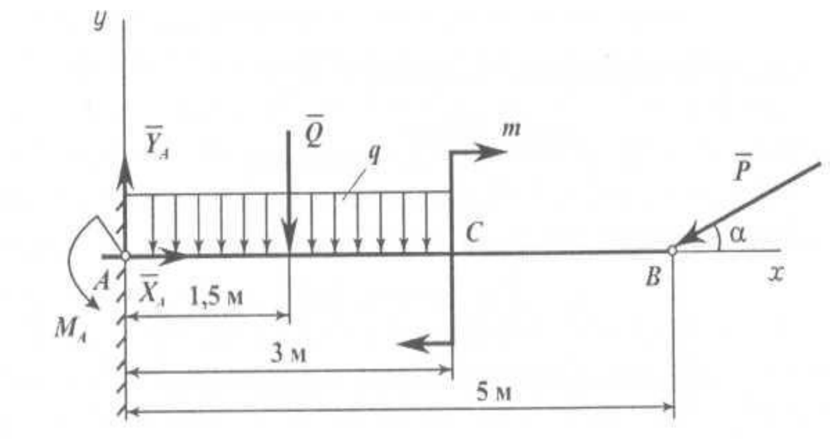


Рис. 1.

Сила $\dot{\bar{Q}}$, прикладена посередині ділянки АС і спрямована у той же бік, що і саме навантаження, тобто вертикально донизу. Покажемо на силовій схемі пару сил, яка визначається моментом m.

Далі умовно звільняємо балку від в'язі і замінюємо її відповідними реакціями в'язі. У точці А - жорстке закріплення балки у стіні, а тому воно має дві складові реакції: $\dot{\bar{X}}_A$, $\dot{\bar{Y}}_A$, які розташовані вздовж відповідних осей координат, і реактивний момент M_A. Напрямок цього невідомого моменту показуємо на силовій схемі довільно, наприклад, проти напрямку стрілки годинника. Якщо ж при остаточному визначенні моменту M_A отримаємо від'ємний знак, то дійсний напрямок моменту - протилежний. Покажемо на силовій схемі лінійні розміри і осі координат.

Як видно з побудованої розрахунково-силової схеми, балка перебуває під дією плоскої системи довільних сил. Використовуємо умови рівноваги (1.54). А саме:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\bar{P}_k\right) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\left.\begin{aligned} &X_A - P\cos\alpha = 0, \\ &Y_A - Q - P\sin\alpha = 0, \\ &-Q\cdot\frac{AC}{2} - P\sin\alpha\cdot AB + M_A - m = 0. \end{aligned}\right\}$$

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}&X_A-4{,}0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0,\\&Y_A-4{,}5-4{,}0\cdot\frac{1}{2}=0,\\&-4{,}5\cdot\frac{3}{2}-4{,}0\cdot\frac{1}{2}\cdot5+M_A-2{,}0=0.\end{aligned}\right\}$$

З першого рівняння обчислимо *X_A :*

$$X_A=4{,}0\frac{\sqrt{3}}{2}=22\sqrt{3}=3{,}46\ [\text{кН}].$$

З другого рівняння обчислимо Y_A :

$$Y_A=4{,}5+4{,}0’1=6{,}50\ [\text{кН}].$$

З третього рівняння обчислимо *M_A :*

$$M,=2{,}0+4{,}5\frac{3}{2}+4{,}0\frac{1}{2}\text{-}5=2{,}0+6{,}75+10{,}0=18{,}75\ [кН].$$

Оскільки складові реакцій X_A та Y_A, що прикладені у точці *A,* обчислені, то можна знайти модуль K_A повної реакції у точці *A :*

$$R_A=\sqrt{X^2+Y^2;}=\sqrt{(3{,}46)2+(6{,}5)2}=\sqrt{54{,}22}=7{,}36\ [\text{кН}].$$

Таким чином, визначені всі шукані реакції.

Відповідь: R_A =4,30 кН],

M_A =18,75 [кН].

Лабораторна робота №5 Рівновага системи сил

Мета роботи: набуття навичок рішення задач з визначенням навантаження на елементи об’єктів типу «ферма».

Приклад На тришарнірну арку *ABC* (рис. 1) діє вертикальна сила *P* = 10 [кН]. Вага кожної частини балки *[кН*]. Визначити реакції шарнірів *A, B, C* арки, розміри якої дані на рисунку.

Розв ’язання.

Як видно зі схеми, задана система тіл складається з двох напіварок *I* та *II*, які з’єднані шарніром у точці С. Складемо розрахунково-силову схему, де покажемо задані активні сили 0_x, O_2, *P* та реакції в’язей: у точках *A* і *B* (нерухомі шарнірні опори) — X_A, $У_A$ і $X_в$, $У_в$ та у точці С (шарнірне з’єднання) - X_c, *X^* та $У_c$, *У^*. Ці невідомі реакції у точці C є внутрішніми силами системи тіл, а тому $X_c = X^\wedge$ і $У_c = У_c$.

Покажемо осі прямокутної декартової системи координат $Ax\ y$.

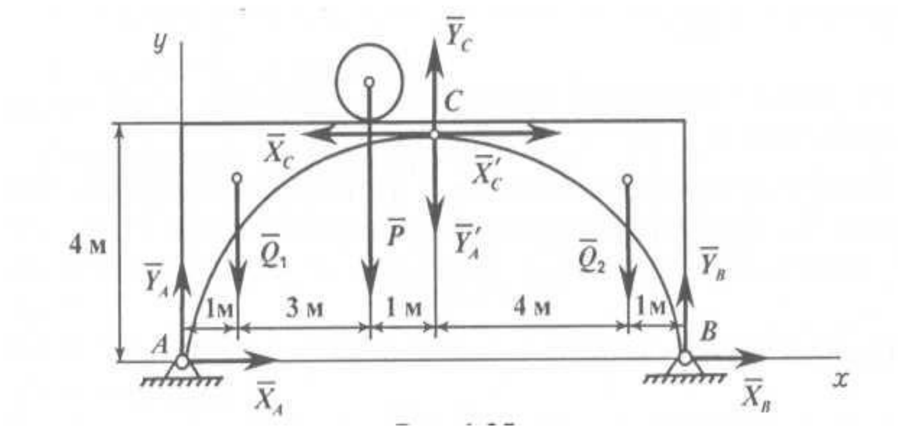


Рис. 1

Умовно розділяємо систему тіл на два окремих тіла по шарніру С. Дію відкинутої частини замінюємо двома реакціями Xc і Yc, які дорівнюють:

$$\overline{X}_C = -\overline{X}'_C\ ,$$
$$\overline{Y}_C = -\overline{Y}'_C\ .$$

Тепер розглянемо окремо рівновагу кожного тіла, для чого складемо дві системи рівнянь рівноваги. Використаємо умови рівноваги (1.54).

Для першого тіла (ліва половина арки):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0;\ X_A - X_C = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0;\ Y_A + Y_C - Q_1 - P = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} m_A\left(\overline{P}_k\right) = 0;\ X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Для другого тіла (права половина арки):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0;\ X_B + X'_C = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0;\ Y_B - Y'_C - Q_2 = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} m_B\left(\overline{P}_k\right) = 0;\ Q_2 \cdot 1 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 5 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Як видно з отриманих шести рівнянь рівноваги, в них містяться шість невідомих: $X_{A,}\ X_в,\ X_c,\ Y_A,\ Y_в,\ Y_c$.

Визначимо ці невідомі величини. З третього рівняння другої системи визначимо $Y'c$. Перепишемо це рівняння наступним чином:

$$5Y'_C = 4X'_C - Q_2,$$

звідки знаходимо реакцію Y'c :

$$Y'_C = \frac{4X'_C - Q_2}{5};$$

Оскільки чисельно Ус$^{/}$ = Ус, а Хс = X'с, то підставивши значення цих реакцій у третє рівняння першої системи, отримуємо:

$$5\frac{(4X_C - Q_2)}{5} + 4X_C = Q_1 + 4P,$$

або

$$8X_C = Q_1 + Q_2 + 4P,$$

Звідки

$$X_C = \frac{6+6+40}{8} = \frac{52}{8} = 6{,}5\ [kH].$$

Тепер є можливість визначити невідому реакцію У. Підставивши значення Хс у третє рівняння другої системи, будемо мати:

$$Y'_C = \frac{4X_C - Q_2}{5} = \frac{4\cdot 6{,}5 - 6{,}0}{5} = 4{,}0\ [kH].$$

З першого рівняння першої системи маємо $X_A = X_c = 6{,}5$ [кН]. А з першого рівняння другої системи маємо Хв = -X'c = -6,5 [кН]. Напрям цієї реакції є протилежним показаному на силовій схемі. З другого рівняння першої системи одержуємо:

$$Y_A = Q_1 + P - Y_C = 6{,}0 + 10{,}0 - 4{,}0 = 12{,}0\,[kH].$$

З другого рівняння другої системи обчислимо останню невідому реакцію $У_в$. Вона буде дорівнювати $У_в$= 4,0 + 6,0 = 10,0 [кН].

Таким чином обчислено всі шукані величини.

Відповідь:

$$X_A = 6{,}5\,[kH];\quad Y_A = 12{,}0\,[kH];\quad X_B = -6{,}5\,[kH];\quad Y_B = 10{,}0\,[kH];$$
$$X_C = 6{,}5\,[kH];\quad Y_C = 4{,}0\,[kH].$$

Лабораторна робота №6 Рівновага тіла під дією плоскої системи сил

Мета: опанувати методику розрахунку ферми на величину навантаження та їх напрям при зовнішніх навантаженнях.

Розрахунок ферми зводиться до визначення зовнішніх опорних реакцій та внутрішніх реакцій (зусиль) у стрижнях. Зусилля і реакція стрижня співвідносяться між собою, як дія і протидія (рівні за модулем та протилежні за напрямом).

Розглянемо просту плоску ферму (рис. 1.26).

Як бачимо зі схеми - це плоска конструкція, яка складається із 7 стрижнів, що з'єднуються у 5 вузлах. У вузлах I та V ферма має опори (у 1-му вузлі - нерухома шарнірна опора; у У-му - рухома шарнірна опора), до II та до IV вузлів ферми прикладені зовнішні

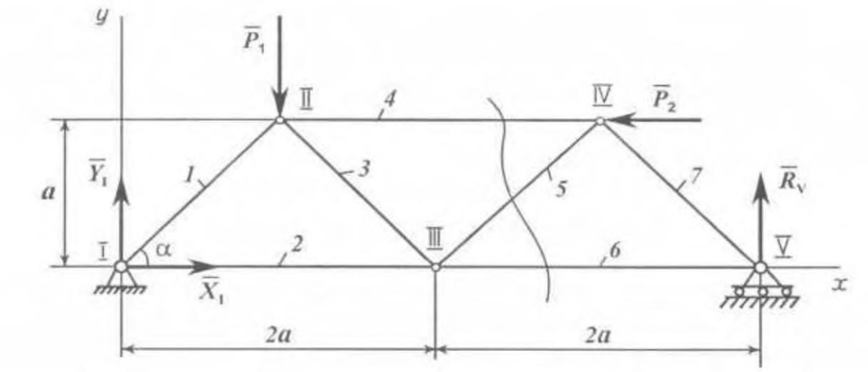


Рис. 1.26.

навантаження у вигляді зосереджених сил $P_1 = 30$[кН]; $P_2 = 10$[кН]). Лінійні та кутові розміри ферми дані на схемі ($\alpha = 45°$). Осі плоскої декартової системи координат I ху показані на схемі ферми.

Розв 'язання. Перший етап розрахунку ферми - це визначення її опорних реакцій. Визначають опорні реакції, розглядаючи ферму в цілому, як тверде тіло з прикладеними зовнішніми силами. Тоді, умовно звільнюючи ферму від в'язей (опор) і замінюючи їх відповідними реакціями (у вузлі I це реакції Х„ Уі; у вузлі V - P_y), маємо плоску систему довільних сил, для якої можна використати умови рівноваги (1.54) і скласти систему рівнянь рівноваги:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0;\ \ X_I - P_2 = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0;\ \ Y_I - P_1 + R_V = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} m_I(\overline{P}_k) = 0;\ \ R_V \cdot 4a + P_2 \cdot a - P_1 \cdot a = 0.
\end{aligned}\right\}$$

З першого рівняння системи обчислюємо невідому реакцію Хг Вона дорівнює:

$$X_I = P_2 = 10\ [kH].$$

З останнього рівняння обчислюємо реакцію P_y:

$$R_V = \frac{P_1 - P_2}{4} = \frac{30 - 10}{4} = 5\ [kH].$$

Далі, з другого рівняння є можливість обчислити останню невідому величину $У_I$:

$$Y_I = P_1 - R_V = 30 - 5 = 25\ [kH].$$

Таким чином, обчислено шукані реакції опор ферми. Тепер необхідно визначити невідомі зусилля в стержнях ферми. Існує декілька способів визначення цих зусиль, графічні і аналітичні.

2. Метод вирізування вузлів

Цей метод полягає в послідовному вирізуванні (уявно) вузлів ферми, починаючи з вузла, де збігаються два стрижні з невідомими внутрішніми зусиллями (реакціями). Таким чином, кожний вузол є плоска система збіжних сил, для якої можна скласти два рівняння рівноваги, з яких визначають невідомі зусилля у цих двох стрижнях.

При застосуванні цього методу приймається правило, за яким реакції стрижнів спрямовуються від вузлів. Якщо ж при визначенні реакції стрижня станеться, що вона має

від'ємний знак, то цей стрижень стиснутий і дійсний напрямок його реакції орієнтований протилежно до вузла.

Визначимо даним методом зусилля в стрижнях ферми, яка наведена на рис. 1.26.

Вирізаємо спочатку вузол 1 (рис. 1.27). Крім реакцій X, та $У_I$ до нього прикладені невідомі реакції стрижнів 1 і 2, які позначаються та S_2 і напрямок яких, за правилом, від вузла.

Покажемо у цьому вирізаному вузлі I осі координат хіу та кут α. Як видно зі схеми, вузол 1 перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил з двома невідомими зусиллями і S_2. Складемо для вузла I рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги для плоскої системи збіжних сил у вигляді (1.18):

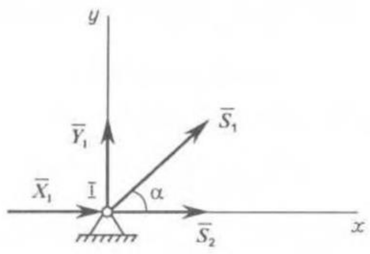


Рис. 1.27

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad X_I + S_2 + S_1 \cos\alpha = 0.\\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad Y_I + S_1 \sin\alpha = 0.\end{aligned}\right\}$$

З другого рівняння визначаємо зусилля

$$S_1 = -\frac{Y_I}{\sin\alpha} = -\frac{25}{0,707} = -35,3 \ [kH].$$

Як легко побачити, стрижень 3 стиснутий зусиллям 35,3 [кН]. З першого рівняння визначимо невідоме зусилля S_2:

$$S_2 = -X_I - S_1 \sin\alpha = -10 - (-35,3 \cdot 0,707) = -10 + 25,00 = 15,00 \left[kH\right].$$

Таким чином, стрижень 2 розтягнений зусиллям 15,00 [кН].

Далі вирізаємо вузол ІІ (рис. 1.28). У цьому вузлі зосереджені зовнішня сила P_1 та реакції трьох стрижнів S_3 та S_4. Причому невідомі реакції тільки у двох стрижнях - у 3 (S_3) та у 4 (S_4). Також попередньо вважаємо, що стрижні 3 і 4 розтягнуті і їх реакції S_3 і S_4 напрямлені від вузла ІІ. Зусилля ж у стрижні 1 вже визначено раніше, при вирізанні першого вузла, і не тільки встановлено його значення, але й те, що він стиснутий, а тому напрямок його реакції S_1 буде до вузла ІІ. Проведемо крізь вузол ІІ осі координат та покажемо кут α.

Складемо для вузла П рівняння рівноваги, також використовуючи умови, які аналогічні (1.18):

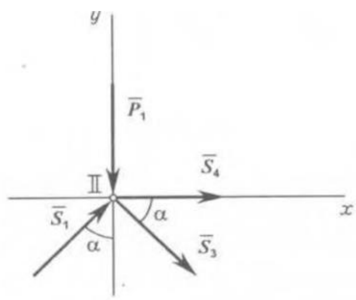


Рис. 1.28.

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad S_4 + S_3 \cos\alpha + S_1 \sin\alpha = 0,\\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad -S_3 \sin\alpha + S_1 \cos\alpha - P_1 = 0.\end{aligned}\right\}$$

З другого рівняння визначаємо зусилля S_3:

$$S_3 = \frac{S_1 \cos\alpha - P_1}{\sin\alpha} = \frac{35,3 \cdot 0,707 - 30}{0,707} = -\frac{5,00}{0,707} = -7,00\,[kH].$$

Як легко побачити, стрижень 3 стиснутий зусиллям 7,00 [кН.]. Напрямок реакції S_3 -до вузла II.

З першого рівняння знаходимо зусилля 8$_4$:

$$S_4 = -S_1 \sin\alpha - S_3 \cos\alpha = -35,30 \cdot 0,707 - (-7,00)\,0,707 =$$
$$= -25,00 + 5,0 = -20,00\ [kH].$$

Таким чином, стрижень 4 стиснутий зусиллям 20,00 [кН.].

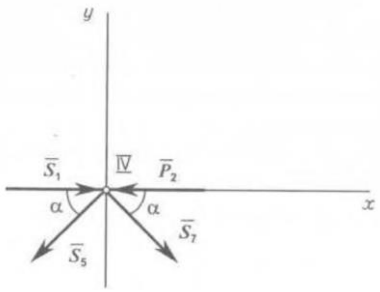


Рис. 1.29.

Далі вирізаємо вузол IV (рис. 1.29). Він перебуває під дією зовнішньої сили P_2 та зусиль у стрижнях 4, 5 та 7. Зусилля у стрижні 4 визначено і його напрямок - до вузла, а тому шукані невідомі - тільки зусилля S_5 та S_7. Проведемо крізь вузол IV осі координат xy та покажемо кут α. Напрямки зусиль у стрижнях 5 і 7 - від вузла IV. Складемо для вузла IV рівняння рівноваги, також використовуючи умови рівноваги (1.18):

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad S_4 - P_2 - S_5 \cos\alpha + S_7 \cos\alpha = 0,\\ \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad -S_5 \sin\alpha - S_7 \sin\alpha = 0.\end{aligned}\right\}$$

$$S_5 = -\frac{S_7 \sin\alpha}{\sin\alpha} = -S_7.$$

Розв'язуємо систему (1.65), для чого з другого рівняння виразимо зусилля S_5 через зусилля S_7: Тепер підставимо значення S_5 у перше рівняння системи

$$S_7\cos\alpha-(-S_7)\cos\alpha-P_2+S_4=0.$$

$$S_7=\frac{P_2-S_4}{2\cos\alpha}=\frac{10-20}{2\cdot 0,707}=-7,00\,[kH].$$

Звідки

Стрижень 7 стиснутий зусиллям 7,00 [кН.]. Тепер маємо можливість знайти зусилля S_5:

$$S_5=-S_7=7,00\,[kH].$$

Стрижень 5 розтягнутий зусиллям 7,00 [кН].

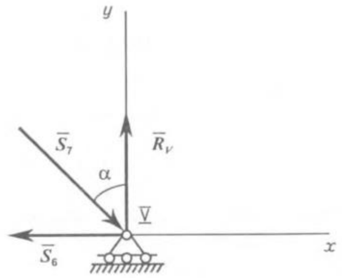


Рис. 1.30.

Тепер, для остаточного визначення зусиль у стрижнях ферми, що розглядається, необхідно вирізати вузол V. До вузла V прикладена реакція R_V зусилля S_7, яке напрямлене до вузла, та невідоме зусилля S_6, яке напрямляємо від вузла. Складемо для вузла V рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги (1.18):

$$\left.\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}P_{kx}=0;\quad & S_7\sin\alpha-S_6=0,\\ \sum_{k=1}^{n}P_{ky}=0;\quad & R_V-S_7\cos\alpha=0.\end{aligned}\right\}$$

Як легко побачити, для визначення останнього невідомого зусилля S_6 достатньо розв’язати перше рівняння системи (1.66):

$$S_6=S_7\cos\alpha=7,00\cdot 0,707=5,00\,[kH].$$

Стрижень 6 розтягнутий зусиллям 5,00 [кН].

Дані розрахунків заносимо в таблицю 1.1. Знак при визначеному зусиллі у стрижні характеризує його навантаження. Якщо знак додатний (+), то стрижень розтягнутий, якщо від’ємний (—), то стрижень стиснутий.

Таблиця 1.1.

№ стрижнів	1	2	3	4	5	6	7
Зусилля в [кН]	-35,30	+ 15,00	-7,00	-20,00	+7,00	+5,00	-5,00

Практична робота №7 Тертя ковзання та тертя кочення

Мета: опанувати методику знаходження кута тертя для тіла розміщеного на твердій похилій поверхні.

Приклад 1 Визначити кут тертя можна, якщо розглядати рівномірний рух тіла по похилій площині. Нехай площина, по якій рухається тіло вагою Q (рис. 1), нахилена до горизонту під деяким кутом ф, таким, що рух тіла буде рівномірним. Проведемо крізь точку O, де прикладені сили, нормаль n. Далі розкладемо вагу тіла на складові: G sinφ та G cosφ. Складова Q sinα намагається рухати тіло донизу, але цьому заважає сила тертя Fтр, напрямок якої протилежний напрямку складової G sinφ . Якщо показати осі координат x,y і вважати, що тіло перебуває у стані рівноваги під дією плоскої системи збіжних сил, то можна скласти систему двох рівнянь рівноваги у вигляді (1.18):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}P_{kx}=0;\quad -F_{mp.}+G\sin\varphi=0,\\ &\sum_{k=1}^{n}P_{ky}=0;\quad N-G\cos\varphi=0.\end{aligned}\right\}$$

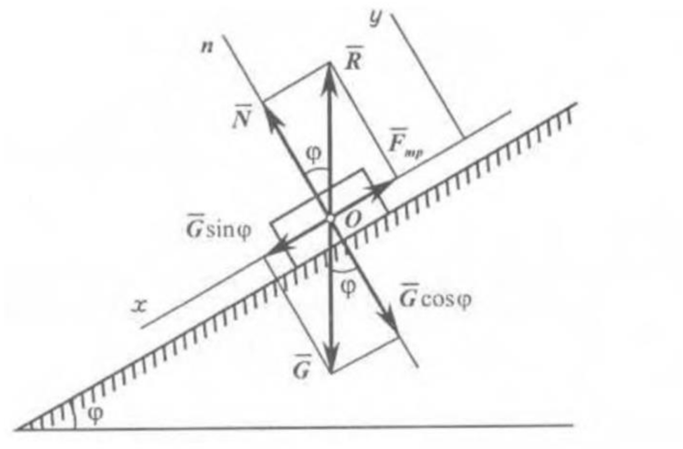


Рис. 1.

З першого рівняння отримаємо значення сили тертя:

$$F_{mp} = G\sin\varphi,$$

а з другого рівняння отримаємо значення нормальної реакції похилої площини:

$$N = G\cos\varphi.$$

Далі, якщо підставити вирази (1.75) та (1.76) у вираз (1.72), матимемо:

$$f = \frac{F_{mp}}{N} = \frac{G\sin\varphi}{G\cos\varphi} = tg\varphi.$$

Звідси можна побачити, що в даному випадку кут φ і є той кут, на який відхилена від нормалі п повна реакція R поверхні при геометричному додаванні сил N та $F_{тр}$. Цілком очевидно, що якщо кут нахилу похилої площини до горизонту буде більшим ніж φ, то тіло почне рухатись по похилій площині з деяким прискоренням.

Приклад 2

Розглянемо тіло на похилій площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює а (рис. 2). Вага тіла дорівнює (д, до нього прикладена зовнішня сила Рх, яка викликає рівномірний рух тіла вгору зі швидкістю V = сопsт. Вважаємо, що тіло перебуває у стані рівноваги, а тому можна використати рівняння статики.

Складемо розрахунково-силову схему. До тіла у точці О прикладена реакція поверхні А (або сила нормального тиску). сила тертя F , напрямок якої протилежний напрямку руху тіла.

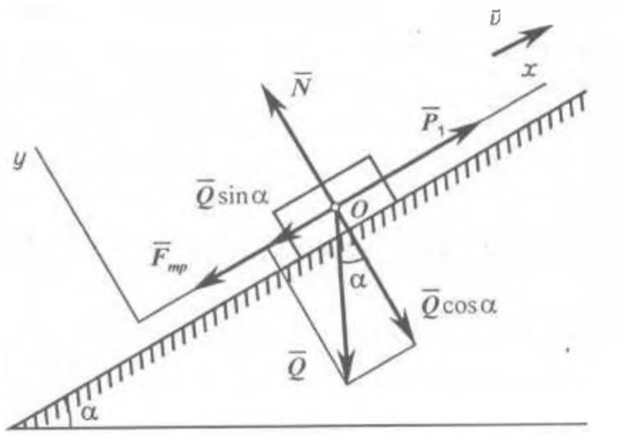


Рис. 2

Складемо рівняння рівноваги у вигляді (1.18), враховуючи, що тіло перебуває піл дією плоскої системи збіжних сил

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad P_1 - F_{mp} - Q\sin\alpha = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad N - Q\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right|$$

З другого рівняння знаходимо реакцію поверхні N

$$N = Q\cos\alpha,$$

а з першого рівняння - значення сили P_1:

$$P_1 = F_{mp} + Q\sin\alpha.$$

Підставимо вираз (1.81) у вираз (1.80), отримаємо

$$P_1 = fQ\cos\alpha + Q\sin\alpha = Q(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Тепер, якщо не прикладати силу P_1, то тіло буде рухатись із прискоренням донизу. А тому, визначимо таку мінімальну силу P_2, при дії якої рух тіла донизу був би рівномірним і щоб тіло було у стані рівноваги (рис. 3). Складемо і для цього випадку розрахунково-силову схему. Вона буде відрізнятись від попередньої тим, що сила тертя $F_{тр}$ буде за напрямком співпадати з силою P_2.

Складемо у цьому випадку рівняння рівноваги у вигляді (1.18):

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0; \quad -P_2 - F_{mp} + Q\sin\alpha = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0; \quad N - Q\cos\alpha = 0. \end{aligned}\right|$$

Як і в попередньому випадку, визначимо силу Fтр . Вона буде дорівнювати м

$$F_{mp} = fQ\cos\alpha.$$

Підставимо дане значення сили тертя Р у перше рівняння (1.83)

$$P_2 = Q\sin\alpha - fQ\cos\alpha = Q(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Порівняємо вирази (1.82) і (1.84). Як легко побачити, якщо зовнішня сила Р буде мати значення в межах $P_2 < P < P_1$, то тіло буде у стані спокою, і використовувати формулу (1.69) для визначення сили тертя F в цьому разі не можна.

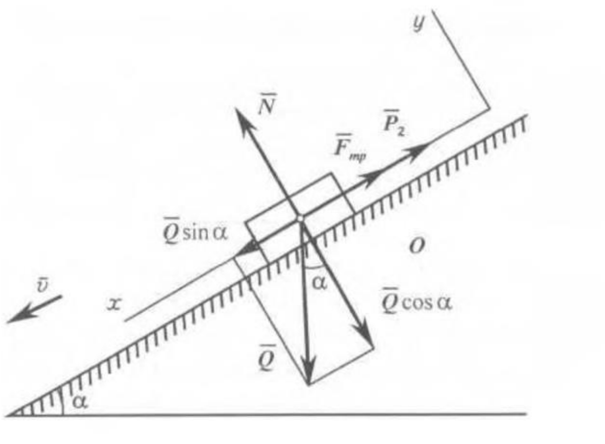


Рис. 3.

Вирази (1.82) та (1.84) можуть бути використаними при розв’язуванні задач на рівновагу тіла, що перебуває на похилій площині.

Механіка матеріалів і конструкцій

(Частина 2)

Практична робота №1 Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі (4 години)

Мета роботи: Засвоїти методику визначення моменту інерції, та опору перерізу а також радіусу інерції перерізу балки, яка складається з декількох елементів прокатної сталі.

Приклад виконання роботи:

На рис. 1 зображено плоский переріз конструкції, яка складається з двох швелерів №12 (вони позначені позиціями 1 та 3) та двох швелерів №18 (вони позначені позиціями 2 та 4). Необхідно знайти осьові моменти інерції I_{xc}, I_{yc} для даного перерізу, моменти опору перерізу Y_{xc}, X_{yc} та радіуси інерції i_x, i_y.

1. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері, вказуємо розміри та вибираємо осі кординат з початком в центрі ваги кожного елемента конструкції (рис. 2.11).
2. Виписуємо дані з таблиці сортаменту (додаток 2). Для швелерів №12 та 18 переводимо значення всіх параметрів із мм в см. Необхідно пам’ятати про приведення всіх показників до однакових одиниць виміру.

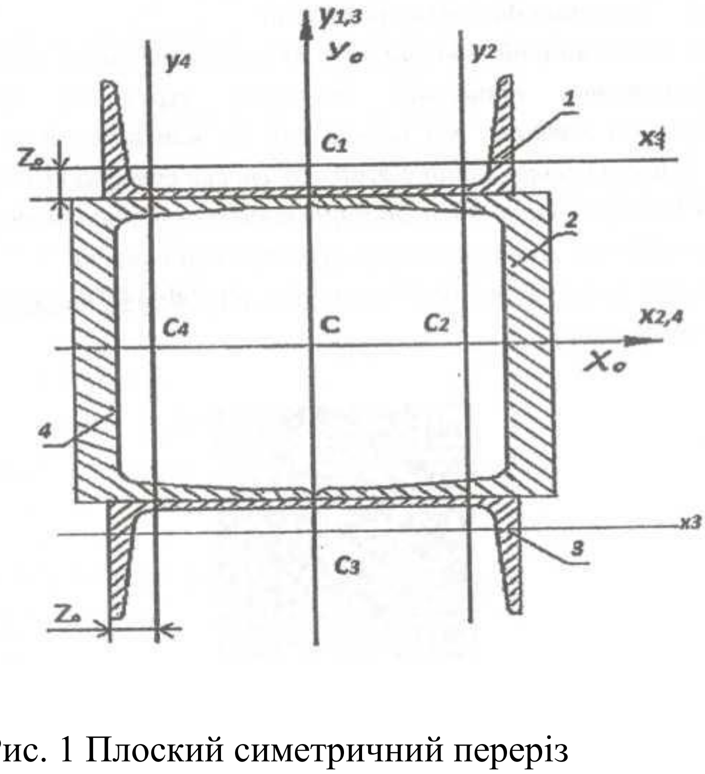


Рис. 1 Плоский симетричний переріз

Позиція 2,4 - профіль № 18:
$h_2 = 180мм = 18см;$
$b_2 = 70мм = 7см;$
$d_2 = 5,1мм = 0,51см;$
$t_2 = 8,7мм = 0,87см;$
$F_2 = 20,7, см^2;$
$I_{y2} = 86см^4;$
$I_{x2} = 1090см^4;$
$Z_{02} = 1,94$ см

Позиція 1,3 профіль - № 12:
$h_1 = 120мм = 12см;$
$b_1 = 52мм = 5,2см;$
$d_1 = 4,8мм = 0,48см;$
$t_1 = 7,8мм = 0,78см;$
$F_1 = 13,3\ см^2;$
$I_y = 31,2\ см^4 = I_{x1} = I_{x3};$
$I_x = 304см^4 = I_{y1} = I_{y3};$
$Z_{01} = 1,54$ см

Розв'язання

1. Дана конструкція є симетричною, центром в точці С. Введемо систему координат Хс Ус з початком в точці С. Осі Хс Ус називаються центральними осями. Знайдемо координати центра ваги кожного елемента конструкції в цій системі координат.

$$C_1 = \begin{cases} X_{C1} = 0; \\ Y_{C1} = \frac{h_2}{2} + Z_{01} = 9 + 1,54 = 10,54\ см; \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} X_{C_2} = b_2 - Z_{02} = 7 - 1,94 = 5,06\ см; \\ Y_{C_2} = 0; \end{cases}$$

$$C_3 = \begin{cases} X_{C3} = 0; \\ Y_{C3} = -10,54\ см; \end{cases} \qquad C_4 = \begin{cases} X_{C4} = -5,06\ см; \\ Y_{C4} = 0. \end{cases}$$

2. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу, а також відцентрові моменти інерції. Центральні моменти інерції - це моменти інерції перерізу відносно центральних осей. Для визначення центральних моментів інерції складної фігури потрібно скористатись теоремою про моменти інерції відносно паралельних осей. Так як переріз включає в себе чотири складові фігури, то формула буде виглядати наступним чином:

$$I_u = I_{xc} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4} + F_1 \cdot (Y_{c1})^2 + F_2 \cdot (Y_{c2})^2 + F_3 \cdot (Y_{c3})^2 + F_4 \cdot (Y_{c4})^2;$$
$$I_v = I_{yc} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + I_{y4} + F_1 \cdot (X_{c1})^2 + F_2 \cdot (X_{c2})^2 + F_3 \cdot (X_{c3})^2 + F_4 \cdot (X_{c4})^2.$$

Підставляємо числові дані і отримуємо: тому що осі ХсУс є головними центральними осями.

$$I_{xc} = 31,2 + 31,2 + 1090 + 1090 + 13,3 \cdot (10,54)^2 + 13,3 \cdot (-10,54)^2 + 20,7 \cdot 0 + 20,7 \cdot 0 =$$
$$= 2242,4 + 1477,5 + 1477,5 = 5197,44\ см^4;$$
$$I_{yc} = 86 + 86 + 304 + 304 + 13,3 \cdot 0 + 13,3 \cdot 0 + 20,7 \cdot (5,06)^2 + 20,7 \cdot (-5,06)^2 =$$
$$= 1840\ см^4.$$

3. Визначаємо момент опору перерізу. Формула для знаходження моменту опору перерізу має вигляд:

$$W_x = \frac{I_{xc}}{y_{max}}; \qquad W_y = \frac{I_{yc}}{x_{max}}.$$

Необхідно визначити y_{max} та x_{max}:

$$Y_{max} = 9+5{,}2 = 14{,}2 см; \qquad X_{max} = 7 см;$$

$$W_x = \frac{5197{,}44}{14{,}2} = 366{,}02 \text{ см}^3; \qquad W_y = \frac{1840}{7{,}0} = 262{,}86 \text{ см}^3.$$

4. Визначаємо радіуси інерції за формулами:

$$i_{xc} = \sqrt{\frac{5197{,}44}{68}} = 8{,}74 \text{ см}; \qquad i_{yc} = \sqrt{\frac{1840}{68}} = 5{,}2 \text{ см}.$$

У разі якщо переріз фігури має дві осі симетрії, то ці осі є головними центральними осями і відцентрові моменти інерції відносно них дорівнюють нулю Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх заданих невідомих величин.

Відповідь: I_{xc}=5197,44 см^4; I_{yc}=1840см^4; W_{xc}=366,02 см^3; W_{yc}= 262,86 см^3; i_{xc}=8,74см; i_{yc}=5,2см.

Завдання для самостійного виконання

1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (додаток 2). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.
2. Вибрати допоміжні координатні осі.
3. Знайти координати центру ваги перерізу.
4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.
5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.
6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.
7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.
8. Визначити осьові моменти перерізу.
9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.
10. Виконати перевірку.

Таблиця 2 1

№	№ профілів							Розміри		
					Лист 			a, мм	b, мм	c, мм
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60
20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20
21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40
24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30

Практична робота №2 Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів (2 години)

Мета роботи: Засвоїти методику визначення моменту інерції, опору перерізу а також радіусу інерції пластини.

Приклад виконання роботи: На рис. зображено плоский несиметричний переріз із зміщеним центром ваги. Переріз складається з прямокутника, висота якого b = 40 мм, ширина B = 80 мм та вирізаного напівкруга з діаметром d = 20 мм. Необхідно знайти координати центру ваги конструкції (X_c; $У_c$), осьові моменти інерції (I_{xc}; I_{yc}) моменти опору перерізу (W_{XC}; W_{yc}) та радіуси інерції (I_{xc}; I_{yc})«

Розв'язання

1. Представимо переріз у вигляді простих фігур: прямокутника зі сторонами 40 мм і 80 мм, виріз якого є напівкругом з діаметром 20 мм, центр якого знаходиться на відстані 0,212 d від краю прямокутника.

2. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері, вказуємо розміри

та позначаємо осі. Здійснюємо переведення одиниць виміру, отримуємо: h = 40мм. = 4 см, B = 80 мм. = 8см, (d = 20 мм. = 2 см.

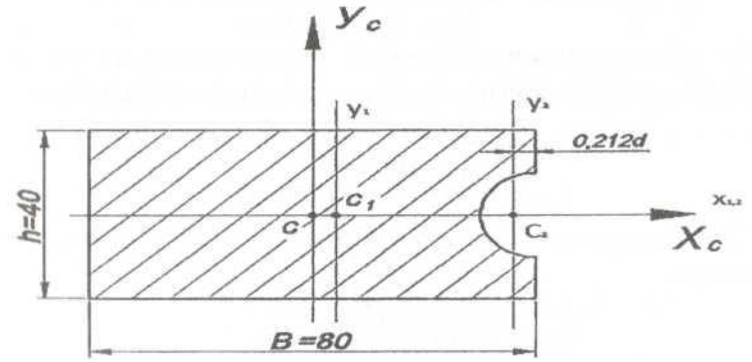


Рис. Плоский несиметричний переріз

3. Визначаємо величину площі кожної з фігур:

$$F_1 = h \cdot b = 4 \cdot 8 = 32\ \text{см}^2;$$
$$F_2 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{3{,}14 \cdot (2)^2}{8} = 1{,}57\ \text{см}^2.$$

Для вирізаного напівкруга значення площі F та осьових моментів інерції I_{XC2}, I_{yc2} приймається як від'ємне.

4. Визначимо координати центра ваги кожної з фігур:

$$C_1 = \begin{cases} X_1 = 0; \\ Y_1 = 0; \end{cases} \qquad C_2 = \begin{cases} X_2 = 4 - 0{,}212 \cdot d = 3{,}576\ \text{см}; \\ Y_2 = 0. \end{cases}$$

Визначимо координати центру ваги складної фігури за формулами:

$$Y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F}; \qquad X_c = \frac{\sum S_y}{\sum F}.$$

Невідомими є статичні моменти площі

$$S_{x1}, S_{x2}, S_{y1}, S_{y2}:$$
$$S_{x1} = F_1 \cdot Y_1 = 0; \qquad S_{x2} = F_2 \cdot Y_2 = 0;$$
$$S_{y1} = F_1 \cdot X_1 = 0; \qquad S_{y2} = F_2 \cdot X_2 = (-1{,}57) \cdot 3{,}576 = -5{,}614\ \text{см}^3.$$

Підставляємо значення статичних моментів площі у формулу координат центру ваги.

$$Y_c = 0; \qquad X_c = \frac{-5{,}614 + 0}{32 - 1{,}57} = \frac{-5{,}614}{30{,}43} = -0{,}185\ \text{см}.$$

5. Визначимо координати центрів ваги простих фігур відносно координат центра ваги всієї конструкції ($X_C Y_C$).

$$C_1 = \begin{cases} X_1 = -X_c = -(-0{,}185) = 0{,}185\text{см}; \\ У_1 = -Y_c = 0\text{см}. \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} X_2 = X_2 - X_c = 3{,}576 - (-0{,}185) = 3{,}761\text{см}; \\ У_2 = Y_2 - Y_c = 0\text{см}. \end{cases}$$

6. Визначимо власні моменти інерції кожної фігури. Для прямокутника осьові

моменти інерції визначаються за формулами:

$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8\cdot 4^3}{12} = 42{,}7\ см^4;$$
$$I_{y1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{4\cdot 8^3}{12} = 170{,}7 см^4.$$

Для напівкруга осьові моменти інерції 1_{XC} та I_{yc} приймаються від'ємними.

$$I_{x2} = -0{,}393 \cdot R^4 = -0{,}393\ см^4;$$
$$I_{y2} = -0{,}11 \cdot R^4 = -0{,}11 см^4.$$

7. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу:

$$I_u = I_{xc} = I_{x1} + F_1 \cdot y_{c1}^2 + I_{x2} + F_2 \cdot y_{c2}^2 = 42{,}7 + 32\cdot 0 - 0{,}393 + (-1{,}54)\cdot 0 =$$
$$= 42{,}3\ см^4;$$
$$I_v = I_{yc} = I_{y1} + F_1 \cdot X_{xc}^2 + I_{y2} + F_2 \cdot X_{c2}^2 = 170{,}7 + 32\cdot(0{,}185)^2 +$$
$$(-0{,}393) + (-1{,}57)\cdot(3{,}761)^2 = 170{,}6 + 1{,}0952 - 0{,}11 - 27{,}2 = 149{,}21 см^4.$$

8. Визначаємо моменти опору перерізу, де $\boldsymbol{У_{max}}$ та $\boldsymbol{X_{max}}$~ пе відстань від нейтральної осі до найбільш віддалених від неї точок перерізу. Максимальна відстань від центра ваги по осі у буде $У_{max}$ = 2см, по осі х буде дорівнювати $\boldsymbol{x_{max}}$= 4,185 см.

$$W_{xc} = \frac{I_{xc}}{y_{max}}; \qquad (y_{max} = 2 см);$$
$$W_{xc} = \frac{42{,}2}{2} = 21{,}15\ см^3;$$
$$W_y = \frac{I_{yc}}{x_{max}}; \qquad (X_{max} = 4{,}185\ см);$$
$$W_y = \frac{149{,}21}{4{,}185} = 35{,}66\ см^2.$$

9. Визначаємо радіуси інерції перерізу за формулами:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{xc}}{F}}; \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_{yc}}{F}}.$$

Необхідно обчислити сумарну площу всього перерізу

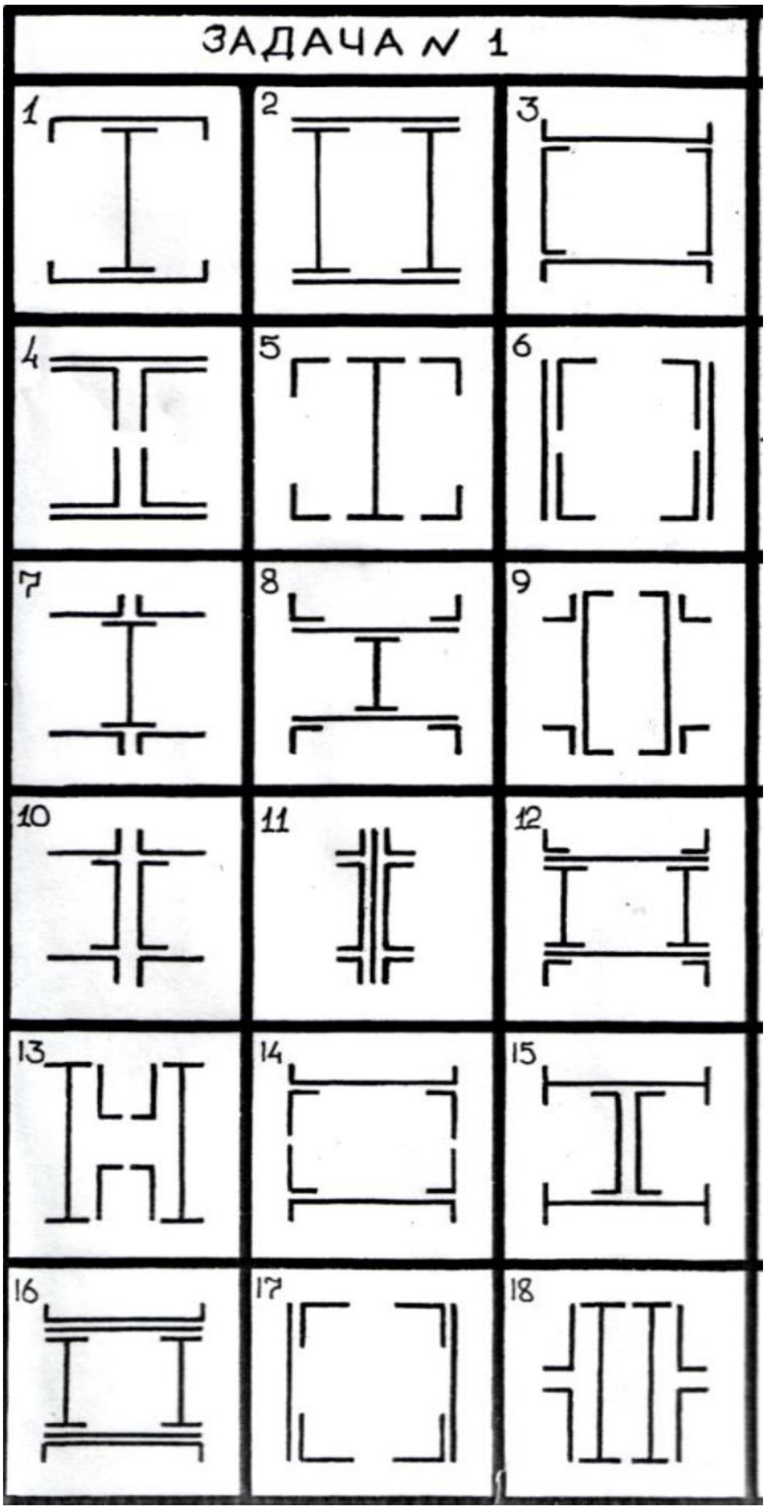
$$\Sigma F = F_1 + (-F_2) = 32 - 1{,}57 = 30{,}43 см^2.$$

Обчислюємо значення радіусів інерції перерізу

$$i_x = \sqrt{\frac{42{,}3}{30{,}43}} = \sqrt{1{,}39} = 1{,}18 см; \qquad i_y = \sqrt{\frac{149{,}21}{30{,}48}} = \sqrt{4{,}9} = 2{,}21\ см.$$

Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх даних невідомих величин.

Відповідь: I_{xc}=42,3 $см^4$; I_{yc}=149,21 $см^4$; W_{xc}= 21,15 $см^3$; W_{yc}=35,66 $см^3$; i_{xc}=1,18 см; i_{yc}=2,21 см.


ЗАДАЧА N 1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18

Практична робота №3

Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для двох елементів (4 години)

Мета роботи: Засвоїти методику визначення моменту інерції, та опору перерізу а також радіусу інерції перерізу балки, яка складається з декількох елементів прокатної сталі.

1. **Приклад виконання роботи**:

На рис. зображено конструкцію, яка складається зі швелера №24 та нерівностороннього кутника №14/9 (додаток 2). Необхідно визначити координати центра ваги конструкції (x_c; y_c), осьові моменти інерції (Ix_c; Iy_c), відцентрові моменти інерції (Ix_c; Iy_c).

Розв'язання

1. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері з вказанням розмірів, показуємо осі.
2. Виписуємо дані з сортаменту, приводимо значення розмірів профілів до одних одиниць виміру.

Швелер (№24 (позиція 2): h_2 = 240 мм. = 24 см; b_2 = 90 мм. = 9 см; d_2 = 5.6 мм. = 0,56 мм t_2 = 10 мм. = 0,1 см. $F_2 = 30{,}6$ см^2; $Ix_2 = 2900$ см^4; $Iy_2 = 208$ см^4; $Z_{02} = 2{,}42$ см $Ixy_2 = 0$	**Нерівнобокий кутник (№14/9 (позиція 1):** B_1 = 140 мм = 14 см; b_1 = 90 мм = 9см; d_1 = 10 мм = 1 см; $F_1 = 22{,}2$ см^2; $Iy_1 = 146$ см^4 = Ix; $Ix_1 = 444$ см^4 = Iy; $X_{01} = 2{,}12 = Y_{01}$; $Y_{01} = 4{,}58 = X_{01}$. $I_{min}\ 1 = 85{,}5$ см^4; ' $tg\alpha = 0{,}406$; $\alpha = 22^0 15^{//}$

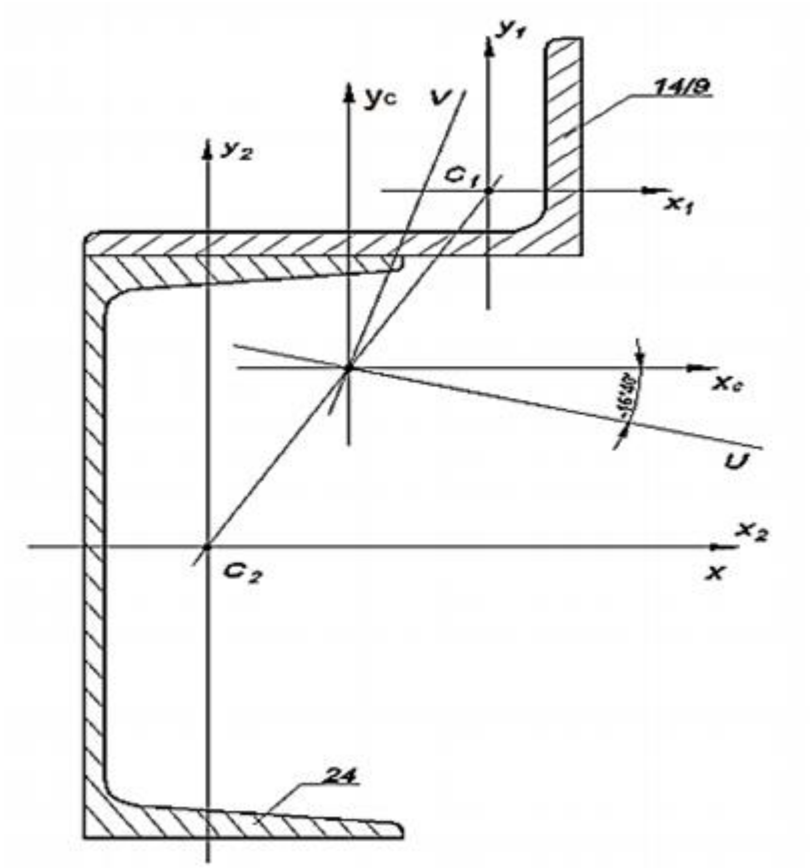


Рис. Плоский несиметричний переріз прокатної сталі

3. Через центр ваги C_1 кутника проведемо осі x1y1, а через центр ваги C_2 швелера - осі x_2y_2 (рис.). Так як початок координатних осей x_2y_2 вибрано в центрі ваги C_2 швелера, тоді за початок відліку приймемо координати С2. Запишемо координати центра ваги кожної фігури відносно осей порівняння, це осі x_2y_2.

$$C_1 = \begin{cases} X_1 = B_1 - Z_{01} - X_{02} = 14 - 2{,}42 - 4{,}58 = 7\text{см}; \\ Y_1 = \dfrac{h_1}{2} + У_{02} = 12 + 2{,}12 = 14{,}12\text{см}; \end{cases} \quad C_2 = \begin{cases} X_2 = 0; \\ Y_2 = 0. \end{cases}$$

4. Визначаємо координати центра ваги всього перерізу за формулами:

$$X_c = \frac{\sum S_y}{\sum F}; \qquad Y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F}.$$

Обчислюємо значення статичних моментів площі:

$$S_{X1} = y_1 \cdot F_1 = 14{,}12 \cdot 22{,}2 = 313{,}5\ \text{см}^3; \qquad S_{X2} = y_2 \cdot F_2 = 0;$$
$$S_{y1} = X_1 \cdot F_1 = 7 \cdot 22{,}2 = 155{,}4\ \text{см}^3; \qquad S_{y2} = X_2 \cdot F_2 = 0.$$

За формулою розрахуємо координати центра ваги даної конструкції:

$$X_c = \frac{155{,}4}{22{,}2+30{,}6} = \frac{155{,}4}{52{,}8} = 2{,}94\ см; \quad Y_c = \frac{313{,}4}{22{,}2+30{,}6} = 5{,}95\ \text{см}.$$

5. В системі координат x_2y_2 покажемо положення центра ваги всієї фігури. Це точка С з координатами Хс = 2,94 см; ус = 5,95 см. Виберемо в точці С початок

центральних осей $x_c y_c$, які паралельні осям Xiyi і x_2y_2. В системі координат $x_c y_c$ знайдемо координати центрів ваги C_1 і C_2.

$$C_1 = \begin{cases} X_{C1} = 7 - 2{,}94 = 4{,}06 \text{ см}; \\ Y_{C1} = 14{,}12 - 5{,}95 = 8{,}17 \, см; \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} X_{c2} = -2{,}94 \text{ см}; \\ Y_{c2} = -5{,}95 \text{ см}. \end{cases}$$

6. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу, а також відцентрові моменти інерції за формулами:

$$I_{Xc} = I_{X1} + F_1 \cdot Y_{c1} + I_{x2} + F_2 \cdot Y_{c2} = 146 + 22{,}2 \cdot (8{,}17)^2 + 2900 + 30{,}6 \cdot (-5{,}95)^2 = 5611{,}1 \text{ см}^4;$$

$$I_{Yc} = I_{y1} + F_1 \cdot X_{y1} + I_{y2} + F_2 \cdot X_{y2} = 444 + 22{,}2 \cdot (4{,}06)^2 + 208 + 30{,}6 \cdot (-2{,}94)^2 = 1282{,}44 \text{ см}^4;$$

$$I_{XcYc} = I_{X1Y1} + F_1 \cdot X_{C1} \cdot Y_{C1} + I_{X2Y2} + F_2 \cdot X_{C2} \cdot Y_{c2};$$

$$I_{x2y2} = 0;$$

$$I_{x1y1} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin\alpha_0;$$

$$I_{max} = I_{X1} + I_{Y1} - I_{min} = 444 + 146 - 85{,}5 = 504{,}5;$$

$$I_{x1y1} = \frac{504{,}5 - 85{,}5}{2} \cdot \sin(22^0 15^/) = 146{,}7 \text{ см}^4;$$

$$I_{X_cY_c} = 146{,}7 + 22{,}2 \cdot 4{,}06 \cdot 8{,}18 + 30{,}6 \cdot (-2{,}94) \cdot (-5{,}94) = 1417{,}5 \text{ см}^4.$$

7. Знайдемо положення головних осей інерції. Головні осі - це ті осі, відносно яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю. На рисунку побудовані осі и, V. Визначаємо кут нахилу головних центральних осей перерізу відносно центральних осей Xc, Y_c

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{X_cY_c}}{I_{Y_c} - I_{X_c}} = \frac{2 \cdot 1417{,}5}{1282{,}4 - 5611{,}1} = -0{,}66;$$

$$2\alpha = -33^0 20`; \qquad \alpha = 16^0 40`.$$

Оскільки: $Ix_{Cc} > Iy_C$, то I_u буде максимальним.

8. Визначаємо головні моменти інерції перерізу, тобто знайдемо моменти інерції перерізу відносно осей u, v.

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = I_{u/v} = \frac{I_{X_C} + I_{Y_C}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{X_C} - I_{Y_C})^2 + 4 \cdot I_{X_C Y_C}^2};$$

$$I_{u/v} = \frac{5611{,}1 - 1282{,}4}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(5611{,}1 - 1282{,}4)^2 + 4 \cdot (1417{,}3)^2} =$$

$$34450{,}0 \pm 2585{,}6;$$

$I_u = I_{max} = 7173{,}64$ см^4; $I_v = I_{min} = -280{,}1$см^4.

Після виконання всіх необхідних розрахунків виконується перевірка правильності виконання задачі.

На першому етапі перевірки повинна виконуватись рівність:

$$I_{Xc} + I_{Yc} = I_u + I_v.$$

Підставляємо числові значення у формулу:

$$5611{,}1 + 1282{,}4 = 7173{,}64 + (-280{,}1).$$

$$6893{,}54 = 6893{,}54$$

В ході другої частини перевірки повинна виконуватись наступна рівність:

$$I_{uv} = 0; \qquad I_{uv} = \frac{I_{Xc} - I_{Yc}}{2} \sin 2\alpha + I_{XcYc} \cdot \cos 2\alpha.$$

Підставляємо числові значення в формулу:

$$I_{uv} = \frac{5607{,}6 - 1282{,}4}{2} \cdot (-0{,}55) + 1417{,}3 \cdot 0{,}836 = -1189{,}9 + 1184{,}9 = 0.$$

Також необхідно обчислити похибку розрахунків.

$$\Delta = \left| \frac{-1189{,}4 + 1184{,}9}{1184{,}9} \right| \cdot 100\% = 0{,}4\%$$

Значення похибки допускається до 5 %.

Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх заданих невідомих величин.

Відповідь: Ixc= 5611,1см^4; I yc = 1282,44 см^4;

I y_c x_c= 1417,5 см^4; α = 16040\`.

2. Завдання для самостійного виконання

1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (додаток 2). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.
2. Вибрати допоміжні координатні осі.
3. Знайти координати центру ваги перерізу.

4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.

5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.

6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.

7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.

8. Визначити осьові моменти перерізу.

9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.

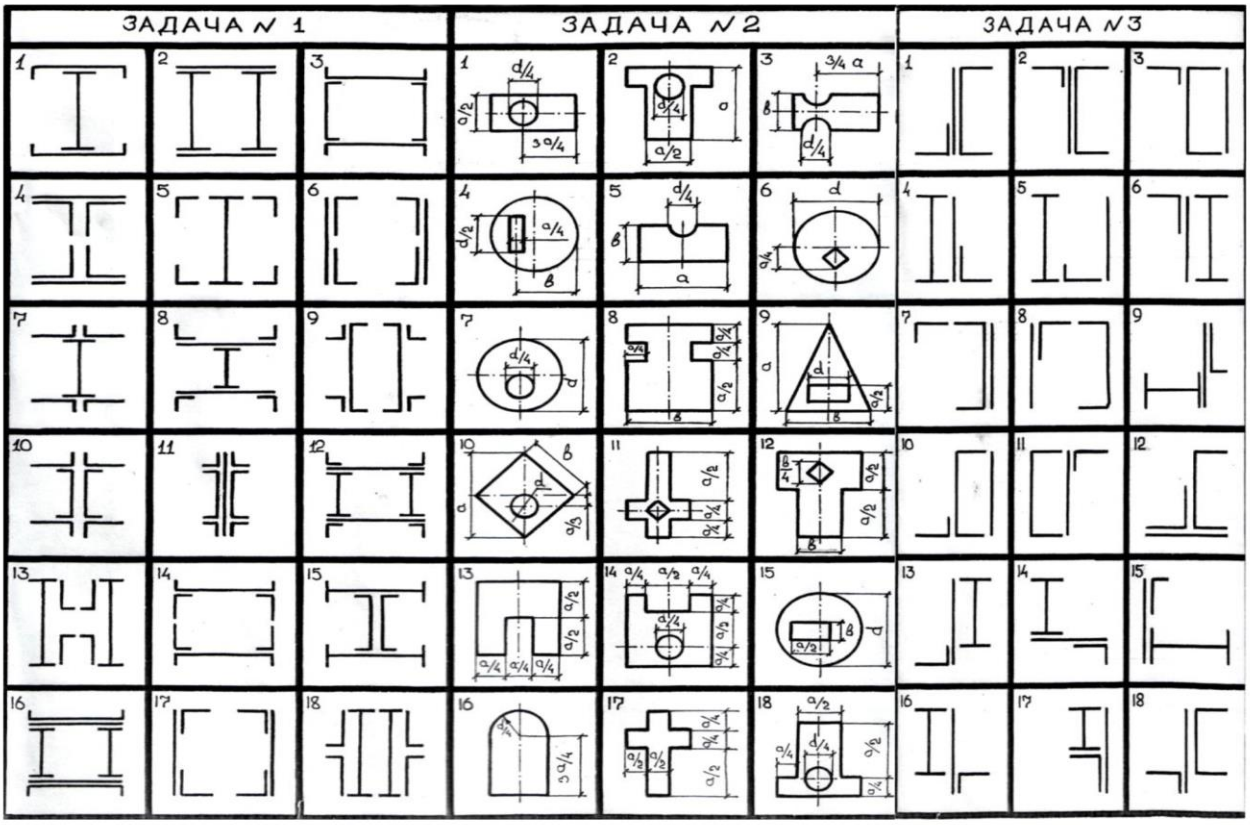
10. Виконати перевірку.

Таблиця 1.

№	№ профілів							Розміри		
	I	H	[	⊔	Лист I	L	⌊	a, мм.	b, мм.	c, мм.
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60
20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20

21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40
24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30

Таблиця 2



Практична робота №4

Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів (4 години)

Мета роботи: Засвоїти методику визначення моменту інерції, та опору перерізу а також радіусу інерції перерізу балки, яка складається з трьох елементів прокатної сталі.

4.1 Приклад виконання роботи:

Для поперечного перерізу, що складається із декількох фігур, необхідно:

1) накреслити переріз в відповідному масштабі, вказати всі необхідні розміри і вибрати осі. (При розрахунку всі необхідні дані потрібно брати із таблиці сортаменту);

2) визначити координати центра ваги;

3) обчислити осьові і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей;

4) знайти положення головних центральних осей інерції;

5) визначити моменти інерції відносно головних центральних осей;

6) зробити перевірку правильності виконання.

Дано: 1) Двутавр № 22; 2) Лист № 12; 3) Кутник нерівносторонній № 100/63/10. Схема розташування фігур зображена на рис. 4.1

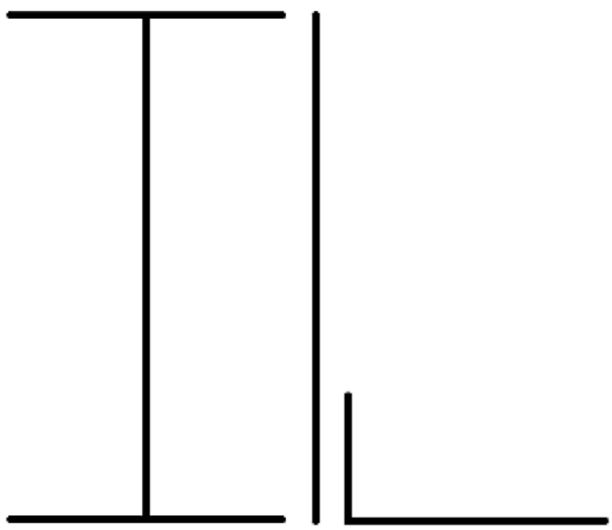


Рис.4.1. Схема розташування фігур

Розв’язання

1. Виписуємо необхідні дані із таблиці сортаменту (додаток

2) та зводимо значення параметрів профілю до єдиних одиниць виміру (см):

Фігура 1 (двотавр) № 22:	**Фігура 2 (лист) № 12:**	**Фігура 3 (кутник) № 100/63/10:**
h_1 = 22 см; b_1 = 11см; d_1 = 0,54 см; F_1 = 30,6 см2; I_{x1} = 2550см ; I_{y1} = 157см ;	h_1 = 22 см; b_1 = 1,2 см; F_2 = 22·1,2 = 26,4 см2;	h_3 = 6,3 см; b_3 = 10 см ; d_3 = 1 см ; $I_{u\,min}$= 28,3 см4; F_3 = 15,5 см2 I_{x3} = 47,1 см4 ; I_{y3} = 154 см4; X_0 = 3,4 см; $У_0$ = 1,58 см; tgα = 0,387 α = 21,15 º

2. Креслимо переріз на міліметровому папері, вказуємо всі розміри і вибираємо осі координат з початком в точках C_1, C_2, C_3 – центрах ваги (рис. 2.15).

3. Визначаємо координати центру ваги всієї фігури. За початок координат приймаємо центр ваги двотавра C_1 і проводимо осі $X_1C_1Y_1$.

Визначаємо координати центрів ваги простих фігур відносно цієї системи координат:

$$\mathbf{C_1}\begin{cases} x_1 = 0; \\ y_1 = 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{C_2}\begin{cases} x_2 = \dfrac{b_1}{2} + \dfrac{b_2}{2} = \dfrac{11}{2} + \dfrac{1,2}{2} = 6,1см; \\ y_2 = 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{C_3}\begin{cases} x_3 = \dfrac{b_1}{2} + b_2 + x_0 = \dfrac{11}{2} + 1,2 + 3,4 = 5,5 + 1,2 + 3,4 = 10,1см; \\ y_3 = -\left(\dfrac{h_1}{2} - y_0\right) = -\left(\dfrac{22}{2} - 1,58\right) = -(11 - 1,58) = -9,42см; \end{cases}$$

Визначаємо координати ХсУс центра ваги складної фігури в системі координат $X_1C_1Y_1$.

$$X_C = \frac{\Sigma S_Y}{\Sigma F} = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0 \cdot 30,6 + 6,1 \cdot 26,4 + 10,1 \cdot 15,5}{30,6 + 26,4 + 15,5} = 4,38см;$$

$$Y_C = \frac{\Sigma S_X}{\Sigma F} = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0 \cdot 30,6 + 0 \cdot 26,4 + (-9,42) \cdot 15,5}{30,6 + 26,4 + 15,5} = -2,01см.$$

Введемо нову систему координат. Координати центрів ваги простих фігур відносно центру ваги складної фігури: X_cY_c з початком в точці С (центром ваги системи тіл). В координатній системі X_cY_c точки мають такі значення.

по осі x: $l_1 = -4{,}38$ см; $l_2 = 1{,}72$ см; $l_3 = 5{,}72$ см.

по осі y: $a_1 = 2{,}01$ см; $a_2 = 2{,}01$ см; $a_3 = -7{,}41$ см;

4. Визначаємо осьові і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей X_cY_c.

$$I_{X_C} = I_{X_1} + a_1^2 \cdot F_1 + I_{X_2} + a_2^2 \cdot F_2 + I_{X_3} + a_3^2 \cdot F_3 =$$

$$= 2550 + 2{,}01^2 \cdot 30{,}6 + \frac{1{,}2 \cdot 22^3}{12} + 2{,}01^2 \cdot 26{,}4 + 47{,}1 + (-7{,}41)^2 \cdot 15{,}5 = 4743{,}27 см;$$

$$I_{Y_C} = I_{Y_1} + l_1^2 \cdot F_1 + I_{Y_2} + l_2^2 \cdot F_2 + I_{Y_3} + l_3^2 \cdot F_3 =$$

$$= 157 + (-4{,}38)^2 \cdot 30{,}6 + \frac{22 \cdot 1{,}2^3}{12} + 1{,}72^2 \cdot 26{,}4 + 154 + 5{,}72^2 \cdot 15{,}5 = 1486{,}45 см;$$

$$I_{X_CY_C} = I_{X_1Y_1} + a_1 \cdot l_1 \cdot F_1 + I_{X_2Y_2} + a_2 \cdot l_2 \cdot F_2 + I_{X_3Y_3} + a_3 \cdot l_3 \cdot F_3 =$$

$$= 0 + 2{,}01 \cdot (-4{,}38) \cdot 30{,}6 + 0 + 2{,}01 \cdot 1{,}72 \cdot 26{,}4 + (\frac{172{,}8 - 28{,}3}{2} \cdot \sin 2\alpha) +$$

$$+ (-7{,}41) \cdot 5{,}72 \cdot 15{,}5 = -941{,}87 см^4;$$

$$I_{x3y3} = \frac{I_{X3} + I_{Y3} - I_{umin} - I_{umin}}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin 2\alpha;$$

$$I_{max} = I_{x3} + I_{y3} - I_{min}.$$

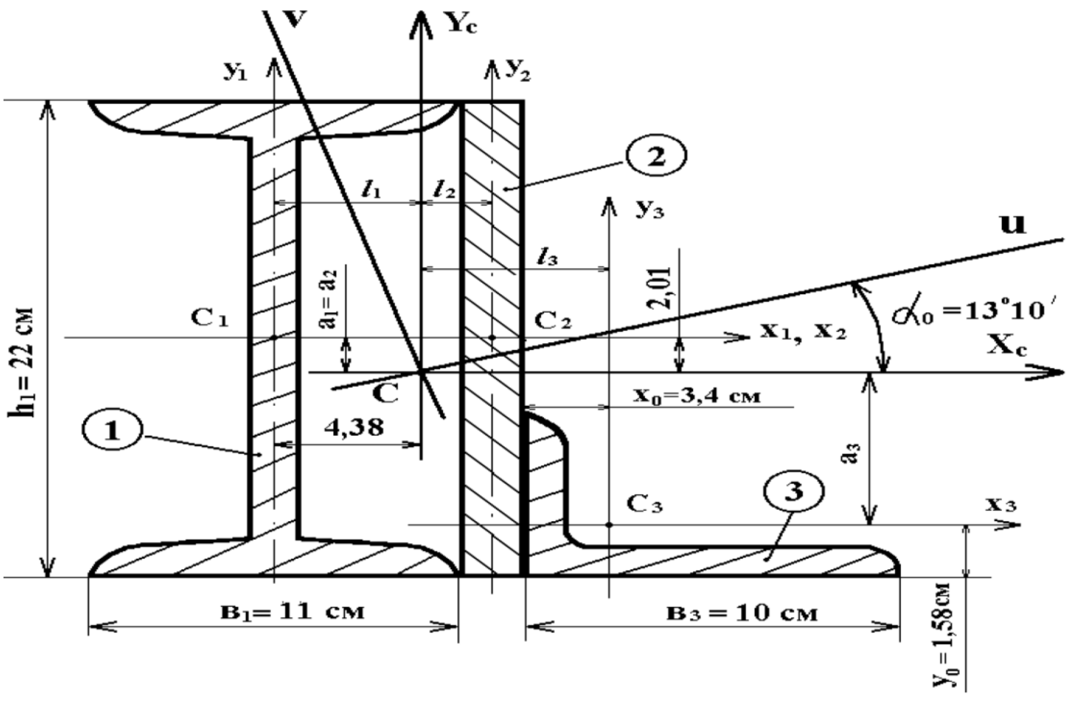


Рис. 4.2. Зображення плоского перерізу заданої схеми із зазначенням всіх необхідних позначень

5. Визначаємо положення головних центральних осей інерції:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{X_C Y_C}}{I_{Y_C} - I_{X_C}} = -\frac{2 \cdot (-941,87)}{1486,44 - 4743,27} = \frac{1883,74}{3256,83} = 0,5784;$$

$$2\alpha_0 = 30^0 04' \qquad \rightarrow \qquad \alpha_0 = 15^0 02'.$$

6. Визначаємо моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$I_{\substack{\max \\ \min}} = I_{\substack{u \\ v}} = \frac{I_{X_C} + I_{Y_C}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{X_C} - I_{Y_C})^2 + 4 \cdot I_{X_C Y_C}^2} =$$

$$= \frac{4743,27 + 1486,44}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4743,27 - 1486,44)^2 + 4 \cdot (-941,87)^2} =$$

$$= 3114,85 \pm 1881,18;$$

$$I_{\max} = I_u = 3114,85 + 1881,18 = 4996,03 \ см^4;$$

$$I_{\min} = I_v = 3114,85 - 1881,18 = 1233,67 \ см^4.$$

7. Перевірка:

а)
$$I_{X_C} + I_{Y_C} = I_u + I_v;$$

$$4743,27 + 1486,45 = 4996,09 + 1233,68;$$

$$6229,72 \approx 6229,70$$

Похибка:

$$\Delta = \frac{6229,72 - 6229,70}{6229,71} \cdot 100\% = 0,3 \cdot 10^{-3}\%;$$

Допускається до 5%.

б)
$$I_{uv} = \frac{I_{X_C} - I_{Y_C}}{2} \cdot \sin 30^0 04' + I_{X_C Y_C} \cdot \cos 30^0 04' = 0;$$

$$I_{uv} = \frac{4743,27 - 1486,44}{2} \cdot 0,5 + (-941,87) \cdot 0,866 = 0;$$

$$I_{uv} = 814,2 + 815,6 = 1,4;$$

Похибка складає:

$$\Delta = \frac{815,6 - 814,2}{815,6} \cdot 100\% = 0,17\%;$$

4.2. Завдання для самостійного виконання

1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (додаток 2). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.

2. Вибрати допоміжні координатні осі.

3. Знайти координати центру ваги перерізу.

4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.

5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.

6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.

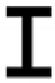
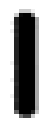
7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.

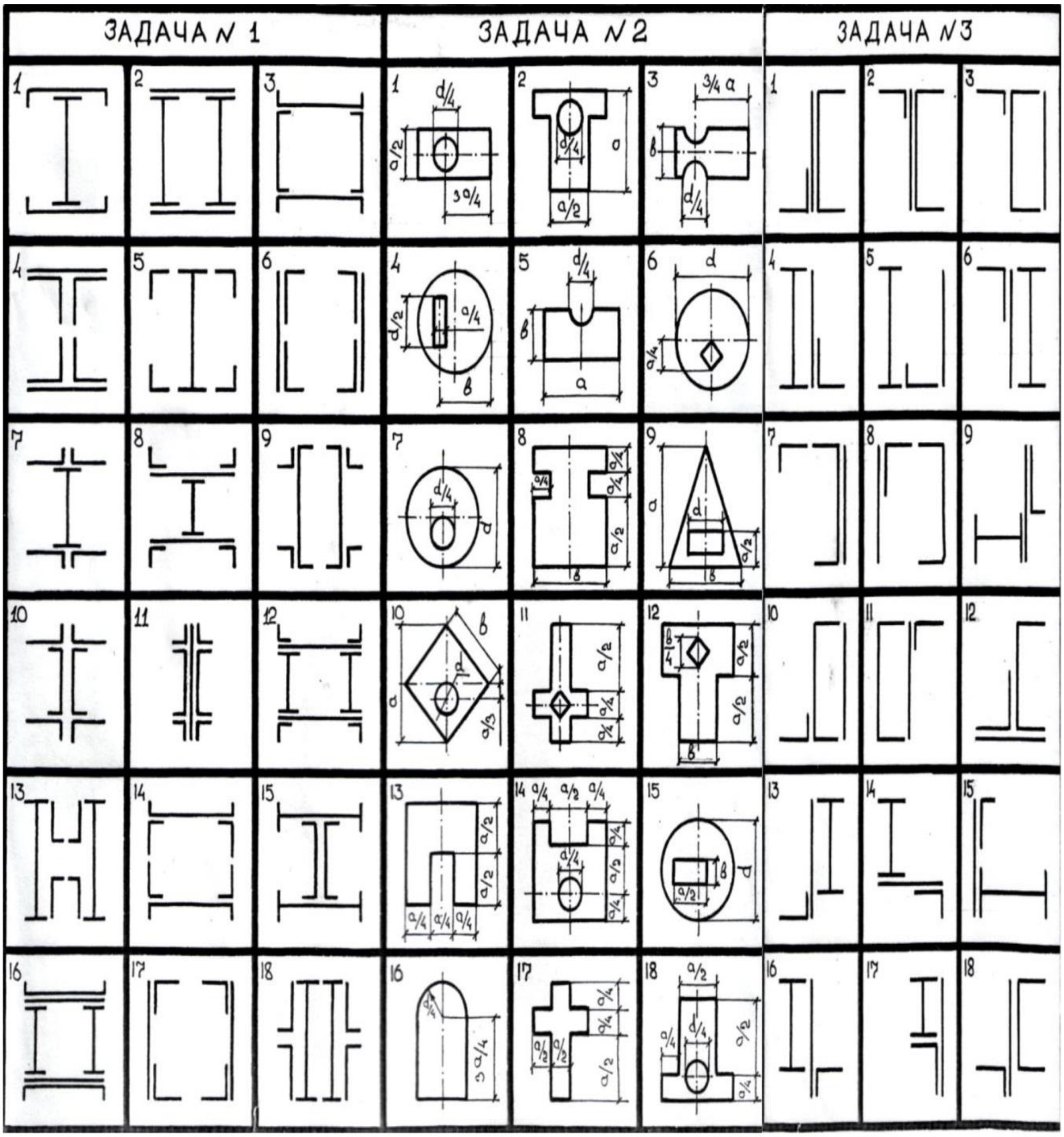
8. Визначити осьові моменти перерізу.

9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.

10. Виконати перевірку

Таблиця 2.1.

№	№ профілів							Розміри		
								a, мм.	b, мм.	c, мм.
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60
20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20
21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40
24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30


ЗАДАЧА N 1
ЗАДАЧА N 2
ЗАДАЧА N 3

Практична робота № 5
Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень (2 години)

Мета: Оволодіти навиками рішення задач та побудови епюр для ступінчастого стрижня на який діють сили, які утворюють на його ділянках розтяг- стискання.

Для стрижня ступенево-змінного поперечного перерізу визначити його деформацію і побудувати епюру абсолютного подовження ($E = 2{\cdot}10^5\,МПа$).
Дано: P_1 = 2 кН; P_2 = 5 кН; P_1 = 7 кН; F_1 = 10 см^2; F_2 = 20 см^2; l_1= 0,5 м; l_2= 0,8 м; l_3= 0,4 м; l_4= 0,6 м.

Розв'язок:

$$N_{1-1} = N_{2-2} = P_1 = 2\ кН\ ;$$

$$N_{3-3} = N_{4-4} = N_{5-5} = N_{6-6} = P_1 - P_2 = 2 - 5 = -3\ кН\ ;$$

$$N_{7-7} = N_{8-8} = P_1 - P_2 + P_3 = 4\ кН\ .$$

Абсолютні деформації ділянок стрижня:

$$\Delta l_I = \frac{N_{1-1}\cdot l_1}{E\cdot F_1} = \frac{2\cdot 10^3\cdot 0{,}5}{2\cdot 10^{11}\cdot 0{,}001} = 5\cdot 10^{-6}\ м\ ;$$

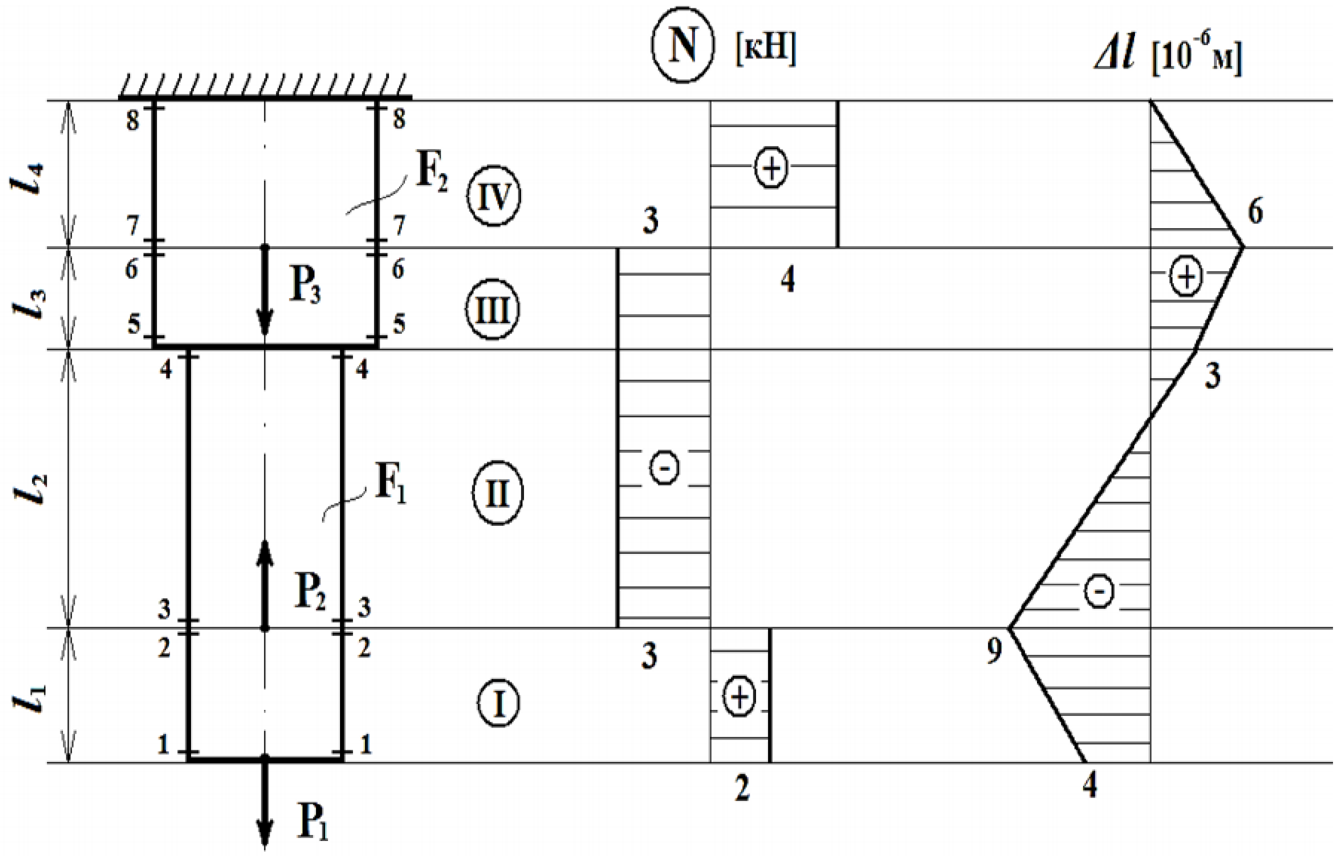


Рис. 1 Рисунок до задачі.

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{3-3} \cdot l_2}{E \cdot F_1} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}001} = -12 \cdot 10^{-6} \ м;$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{5-5} \cdot l_3}{E \cdot F_2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}002} = -3 \cdot 10^{-6} \ м;$$

$$\Delta l_{IV} = \frac{N_{7-7} \cdot l_4}{E \cdot F_2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}002} = 6 \cdot 10^{-6} \ м;$$

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} = (5 - 12 - 3 + 6) \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-4} \, см$$

Побудуємо епюру ***Δl***, яка будується від затиснення стрижня.

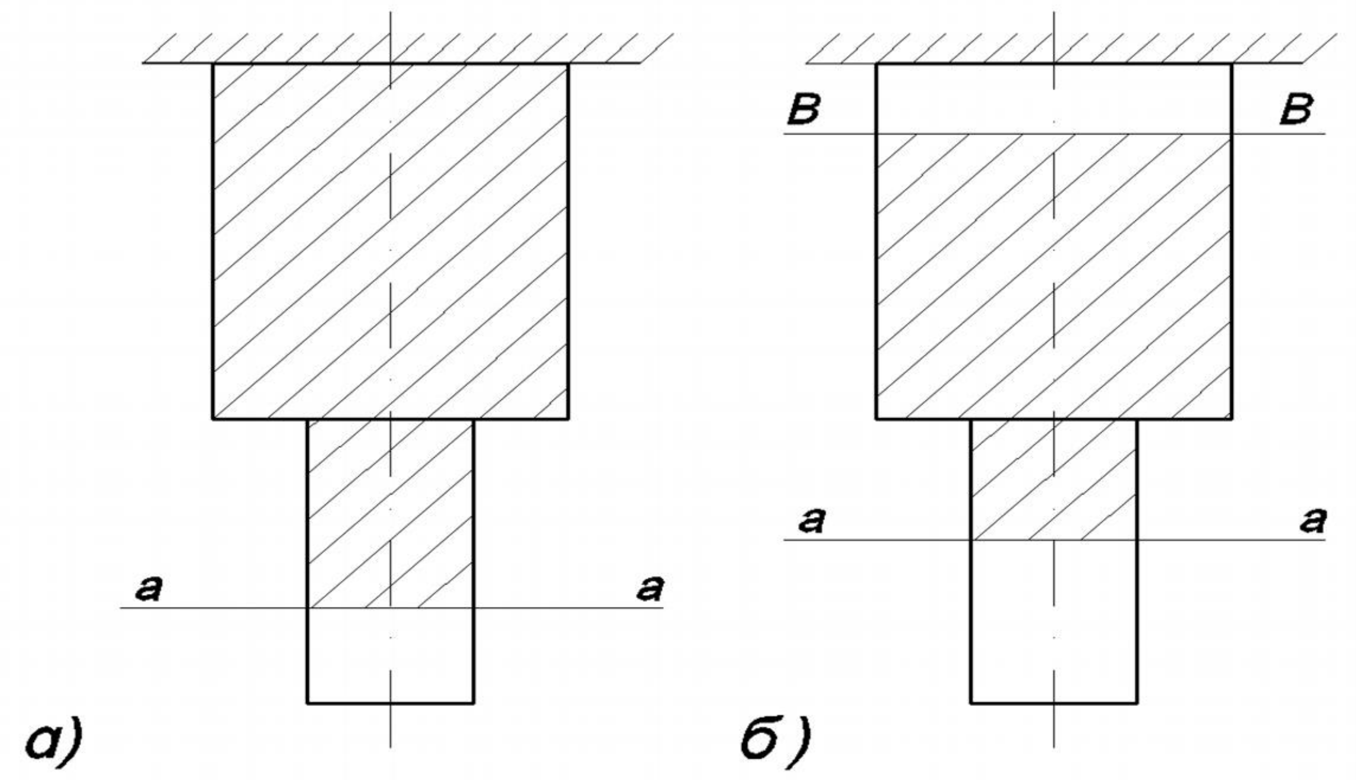


Рис. 2. Визначення переміщень: а) – переріз *а–а* відносно затиснення; б) – двох суміжних перерізів.

Практична робота №6
Практичний розрахунок з’єднань, що працюють на зсув (2 години)

Мета роботи: Засвоїти методику визначення деформації заклепкового та зварного з’єднання, яка буде розглянута, як деформація чистого зсуву

Приклад виконання роботи:

Дійсна деформація заклепкового або зварного з’єднання дуже складна і лише наближено може бути розглянута, як деформація чистого зсуву. Тому методика, що розглядатиметься, має умовний характер, але вона досить проста і підтверджується експериментальними даними на практиці, що забезпечує її широке застосування в інженерній практиці.

а) Розрахунок заклепкового з’єднання (рис. 1).

Руйнування з’єднання може відбуватися з двох причин:

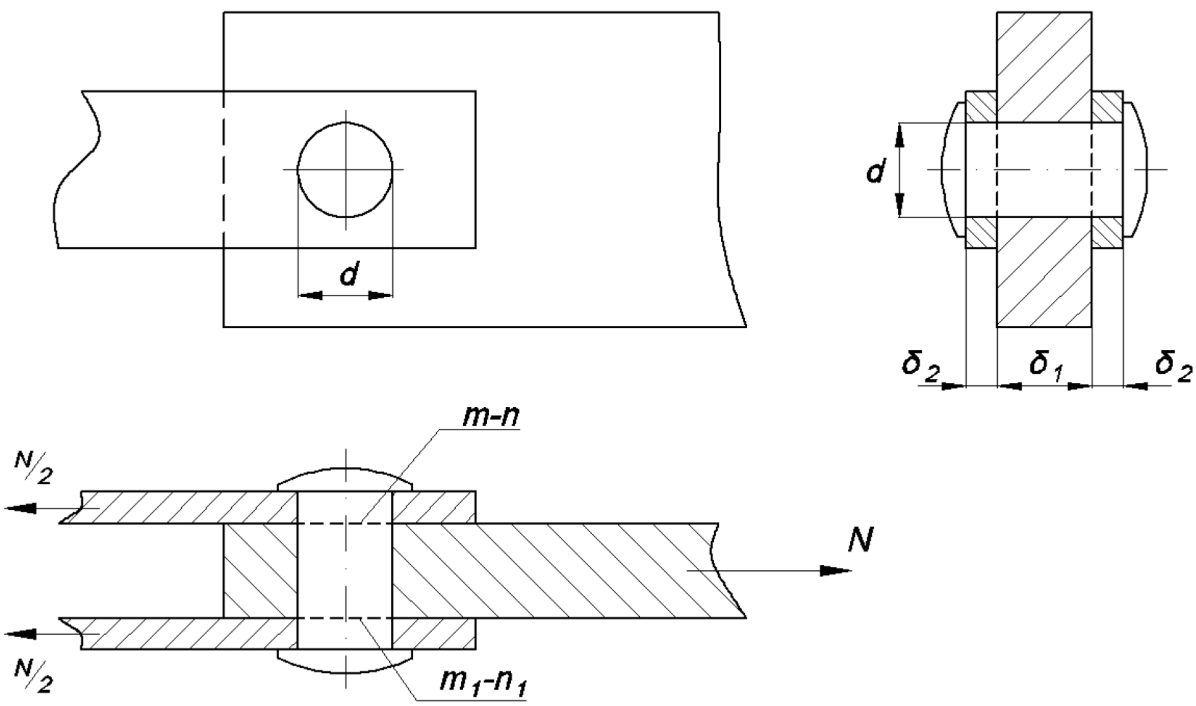


Рис. 1. Схема заклепкового з’єднання.

1) від зрізу заклепки по площинах $\Pi — m$ та $n_1 - m_1$ (рис. 1). Зусилля на зріз визначається за формулою:

$$S_{зр} = F_{зр} \cdot [\tau]_{зр}\,; \qquad (5.16)$$

де площа зрізу: $F_{зр} = \kappa \cdot \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}\,;$

k – кількість площин зрізу;

$[\tau]_{зр}$ – допустиме дотичне напруження від зрізу тіла заклепки.

2) від зминання листів або тіла заклепки. Зусилля на зминання визначається за формулою:

$$S_{зм} = F_{зм}^{\min} \cdot [\sigma]_{зм}\,; \tag{5.17}$$

$$\left.\begin{cases} F_{зм1} = d \cdot \delta_1 \\ F_{зм2} = d \cdot 2 \cdot \delta_2 \end{cases}\right\} \text{площі зминання} \quad (5.18),(5.19)$$

[σ] $_{зм}$ – допустиме значення напруження на зминання заклепки.

Загальна кількість заклепок визначається (рис. 5.10):

$$n = \frac{N}{S_{\min}}\,; \tag{5.20}$$

де: $S_{\min}$ – мінімальне значення, яке приймається з виразів (5.16) або (5.17).

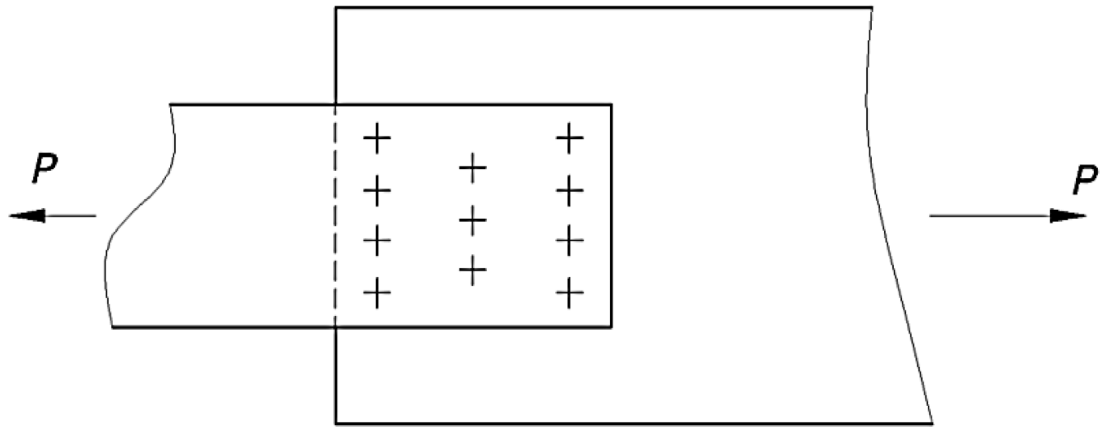


Рис. 2. Визначення кількості заклепок.

б) Розрахунок зварного шва.

Зварні з’єднання не викликають послаблення тіла деталі та є менш трудомістким, тому знайшли широке застосування в інженерній практиці. Руйнування зварного з’єднання відбувається по найменшій площині - бісекторній площині (рис. 2).

При цьому розрахунковий поперечний переріз шва приймається у вигляді трикутника.

Площу зрізу шва розраховують за формулою:

$$F_{зр} = 2 \cdot l_{шв} \cdot 0{,}7 \cdot h = 1{,}4 \cdot h \cdot l_{шв}\,. \tag{5.21}$$

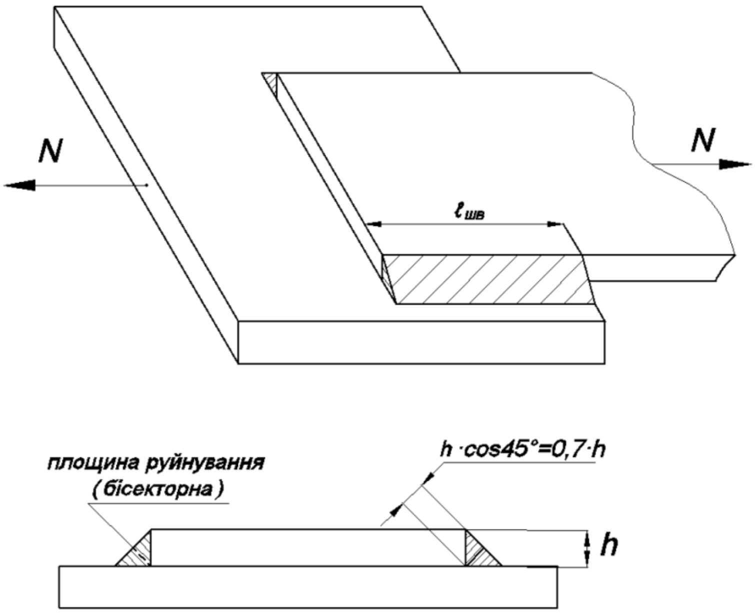


Рис. 3. Зварне з’єднання.

Відповідно до цього, умова міцності зварного шва має вигляд:

$$\frac{N}{F_{зр}} = \frac{N}{1{,}4 \cdot h \cdot l_{шв}} \le [\tau]_{к}^{зв} \tag{5.22}$$

де – $[\tau]_{к}^{зв}$ – допустиме дотичне напруження матеріалу шва на зріз;

l шв– розрахункова довжина шва, яка приймається на 10 мм меншою фактичної довжини через «непровари» при запалюванні та гасінні дуги.

Матеріал шва не має яскраво вираженої площини плинності (крихкий матеріал), тому в момент руйнування τ не вирівнюються.

Тому довжину шва обмежують $l_{шв} \le 60\ h$. З іншого боку, необхідно, щоб

$l_{шв} \ge 40$ *мм,* або $l_{шв} \ge 4\ h$.

Із наведеної умови міцності (5.22) можна знайти довжину зварного шва:

$$l_{шв} = \frac{N}{1{,}4h[\tau]_{к}^{зв}} \tag{5.23}$$

Практична робота №7 Будова епюр моментів кручення, визначення діаметрів валів із розрахунку на міцність (4 години)

Мета роботи: Засвоїти методику визначення моментів кручення при заданому значенні $[\tau]$ визначити діаметр валу із розрахунку на міцність, побудова епюр.

Приклад виконання роботи:

На стальний вал діють чотири моменти. Необхідно:

1) побудувати епюру моментів кручення;

2) при заданому значенні $[\tau]$ визначити діаметр валу із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40,45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм;

3) побудувати епюру кутів закручування;

4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м).

<u>Дано:</u> Стальний вал, схема якого зображена на рис. 1.

M_1=150кН·м ; M_2=150кН·м ; M_3=150кН·м ; M_4=150кН·м; а = в = с = 150см ; $[\tau]$=550 МПа, G=8·10^{10}Па

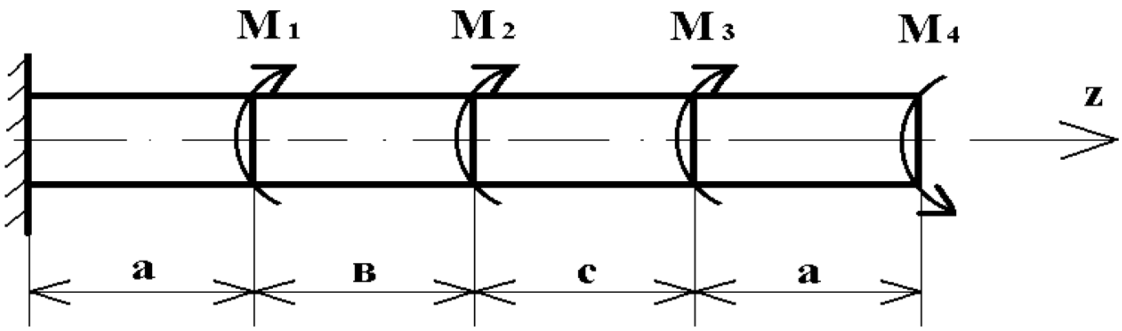


Рис. 1. Стальний вал

1. Визначаємо значення моментів кручення на кожній ділянці валу та будуємо епюру (рис. 1.)

$M_{1-1} = -M_4 = -150\text{кН} \cdot \text{м}$; $M_{2-2} = -M_4 + M_3 = -150 + 150 = 0$;

$M_{3-3} = -M_4 + M_3 + M_2 = -150 + 150 + 150 = 150\text{кН} \cdot \text{м}$; $M_{4-4} = -M_4 + M_3 + M_2 + M_1 = -150 + 150 + 150 + 150 = 300\text{кН} \cdot \text{м}$.

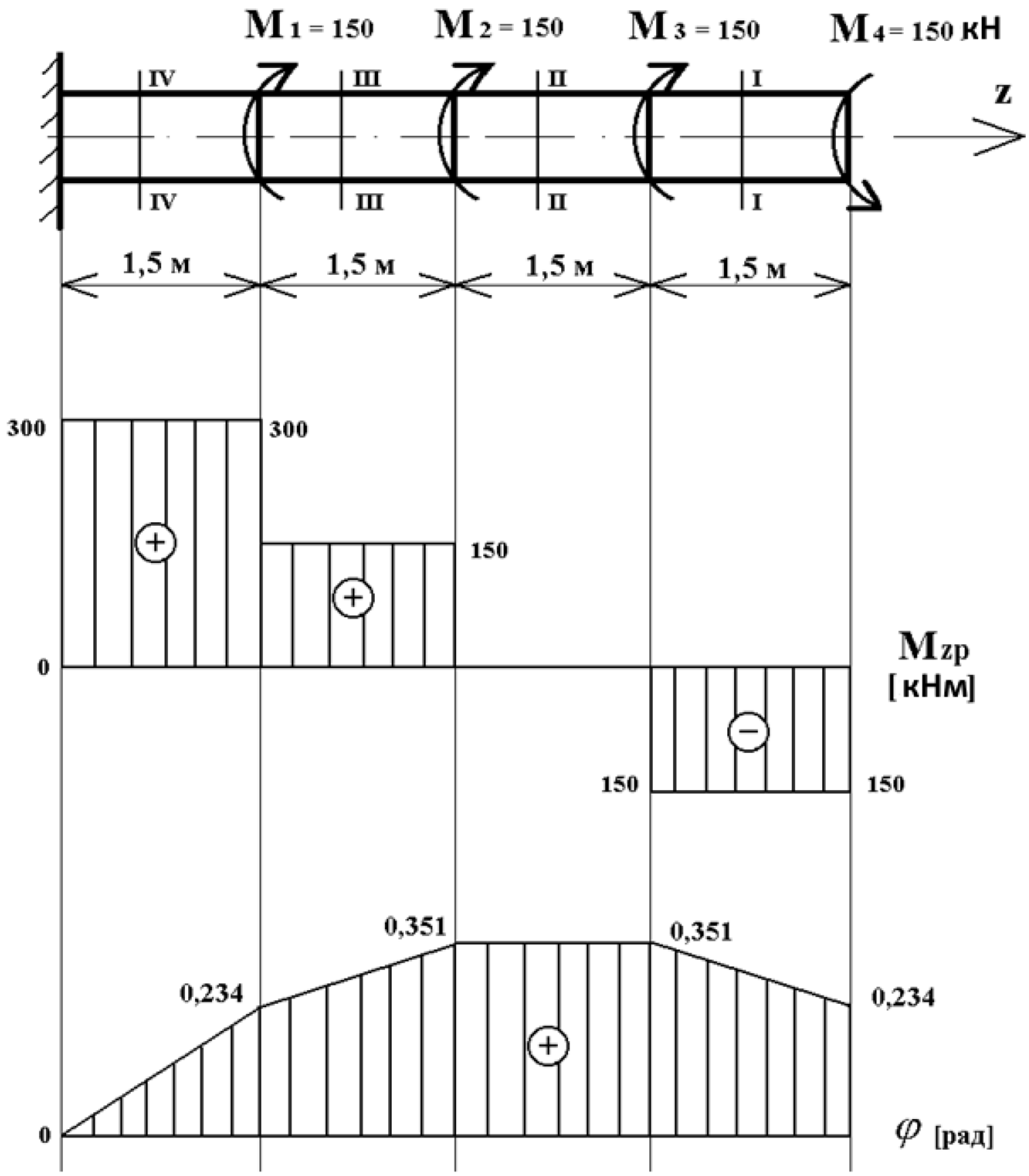


Рис.2. Схема стального валу з побудовою епюр

1. При заданому значенні $[\tau]$ визначаємо діаметр валу:

$$W_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{КР}}}{[\tau]} = \frac{300 \cdot 10^3}{550 \cdot 10^6} = 0{,}5454 \cdot 10^3 \text{м}^3 = 545{,}5 \text{ см}^3$$

$$W_{\text{Кр}} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0{,}1 \cdot d^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{КР}}}{0{,}1}} = \sqrt[3]{\frac{545{,}4}{0{,}1}} = \sqrt[3]{5454} = 17{,}6 \text{ см}$$

Приймаємо діаметр валу рівний 180 мм.

З похибки : Δ= 17,6−18 / 17,6 · 100% = 2,23% , допускається до 5%.

Тобто необхідно прийняти вал більшого діаметру із ряду: Ø = 180мм.

2. Визначаємо кути закручування і будуємо епюру (рис. 2):

$$\varphi_1 = \frac{М_1 \cdot a}{G \cdot I_p} = \frac{-150 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}18)^4} = -0{,}281 \text{ рад}; \qquad \varphi_2 = 0;$$

$$\varphi_3 = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}18)^4} = 0{,}281 \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}18)^4} = 0{,}563 \text{рад}$$

Загальний кут закручування складає:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -0{,}281 + 0 + 0{,}281 + 0{,}563 = 0{,}563 \text{ рад.}$$

Будуємо епюру кутів закручення відносно затиснення валу.

3. Визначаємо найбільший відносний кут закручення, який знаходиться на 5ділянці :

$$\theta = \frac{\varphi_4}{a} = \frac{0{,}563}{1{,}5} = 0{,}375 \text{рад/м}$$

Завдання для самостійного виконання

На стальний вал діють чотири моменти. Необхідно:

1) побудувати епюру моментів кручення;

2) при заданому значенні [τ] визначити діаметр вала із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм;

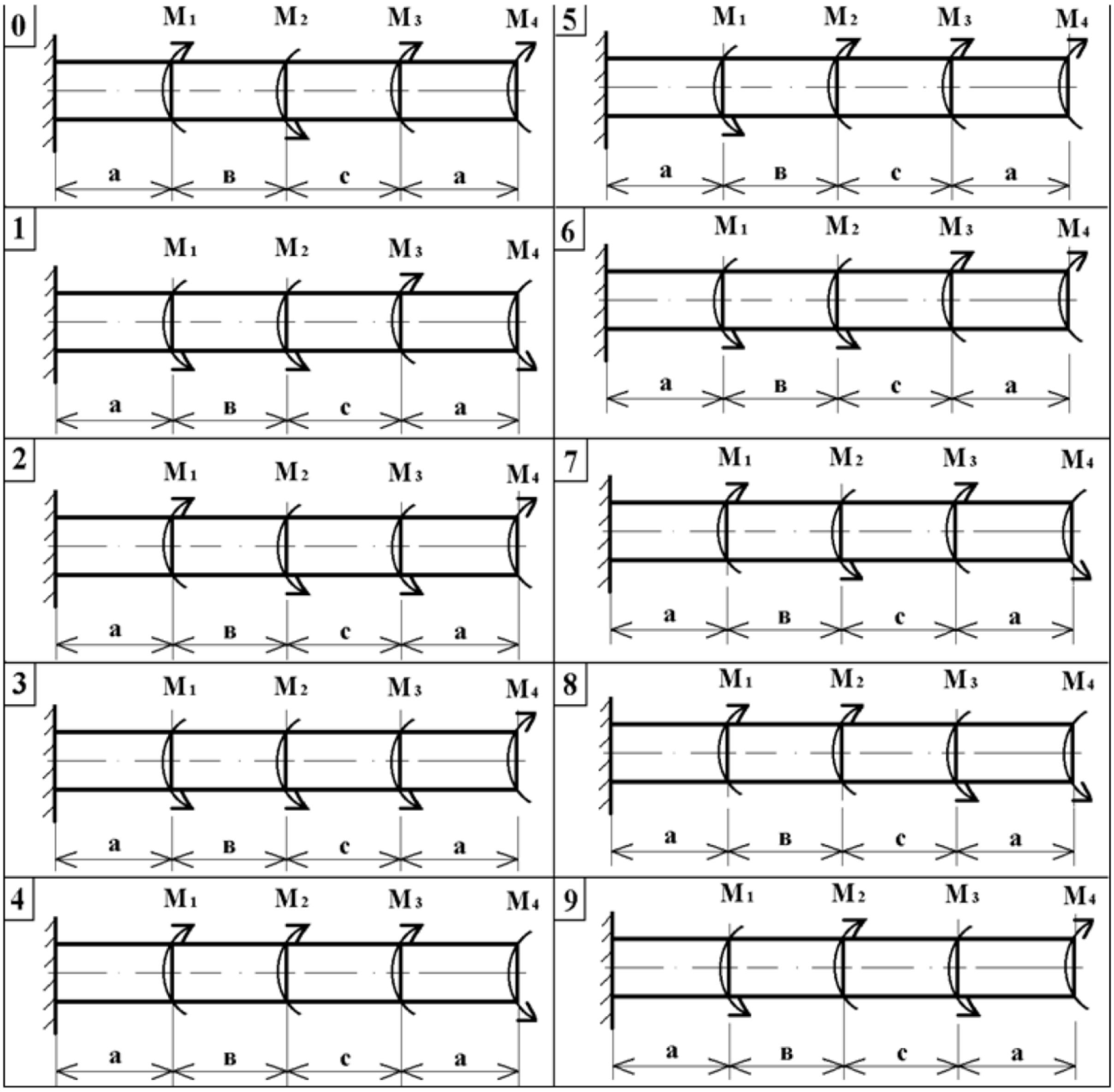
3) побудувати епюру кутів закручування;

4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м).

Таблиця 5.1

Завдання для самостійного виконання

№	а, м	в, м	с,м	M_1, кНм	M_2, кНм	M_3, кНм	M_4, кНм	[τ], МПа
1	1,1	1,1	1,1	110	110	110	110	35
2	1,2	1,2	1,2	120	120	120	120	40
3	1,3	1,3	1,3	130	130	130	130	45
4	1,4	1,4	1,4	140	140	140	140	50
5	1,5	1,5	1,5	150	150	150	150	55
6	1,6	1,6	1,6	160	160	160	160	60
7	1,7	1,7	1,7	170	170	170	170	65
8	1,8	1,8	1,8	180	180	180	180	70
9	1,9	1,9	1,9	190	190	190	190	75
0	2,0	2,0	2,0	200	200	200	200	80



Практична робота №8 Плоский згин. (4 години)

Мета роботи: Засвоїти методику побудови епюр згинаючих моментів та поперечних сил для балки та по розрахунковим даним підібрати з прокату балку, яка б могла чинити спротив зазначеним навантаженням.

Приклад виконання роботи:

Побудувати епюри M_X та Q_y для заданої балки (рис. 1).

Розв'язання задачі поділяємо на чотири етапи:

1) Визначаємо опорні реакції. Вважаємо, що балка – абсолютно тверде тіло, складаємо для неї рівняння рівноваги, розв'язуючи які, знаходимо опорні реакції (рис. 1).

$$\sum M_B = 0;$$
$$10 \cdot P_1 + q \cdot 4 \cdot 8 - R_A \cdot 8 + P_2 \cdot 3 - M = 0;$$
$$R_A = 177{,}5 \text{ кН}.$$
$$\sum M_A = 0;$$
$$2 \cdot P_1 - 5 \cdot P_2 + 8 \cdot R_B - M = 0;$$
$$R_B = 102{,}5 \text{ кН}.$$

Перевірка (спроектуємо всі сили на вісь Y):

$$\sum Y = 0;$$
$$P_1 + q \cdot 4 - R_A + P_2 - R_B = 0;$$
$$40 + 80 - 177{,}5 + 160 - 102{,}5 = 0.$$

11. Розбиваємо балку на ділянки. Границями ділянок є початок і кінець балки, точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження *q* та його закінчення.

Умовно балку поділено хвилястими перерізами, які відмічені на схемі (рис. 1) цифрами вздовж балки.

12. Визначаємо величину поперечної сили Q_y в характерних перерізах і будуємо її епюру (рис. 1).

$$Q_{y(1)} = -P_1 = -40 \text{ кН;}$$

$$Q_{y(2)} = -P_1 - 2 \cdot q = -80 \text{ кН;}$$

$$Q_{y(3)} = -P_1 - 2 \cdot q + R_A = 97{,}5 \text{ кН;}$$

$$Q_{y(4)} = Q_{y(5)} = -P_1 - 4 \cdot q + R_A = 57{,}5 \text{ кН;}$$

$$Q^{np}_{y(6)} = -R_B + P_2 = 57{,}5 \text{ кН;}$$

$$Q^{np}_{y(7)} = Q^{np}_{y(8)} = -R_B = -102{,}5 \text{ кН;}$$

$$Q^{np}_{y(9)} = Q^{np}_{y(10)} = 0 .$$

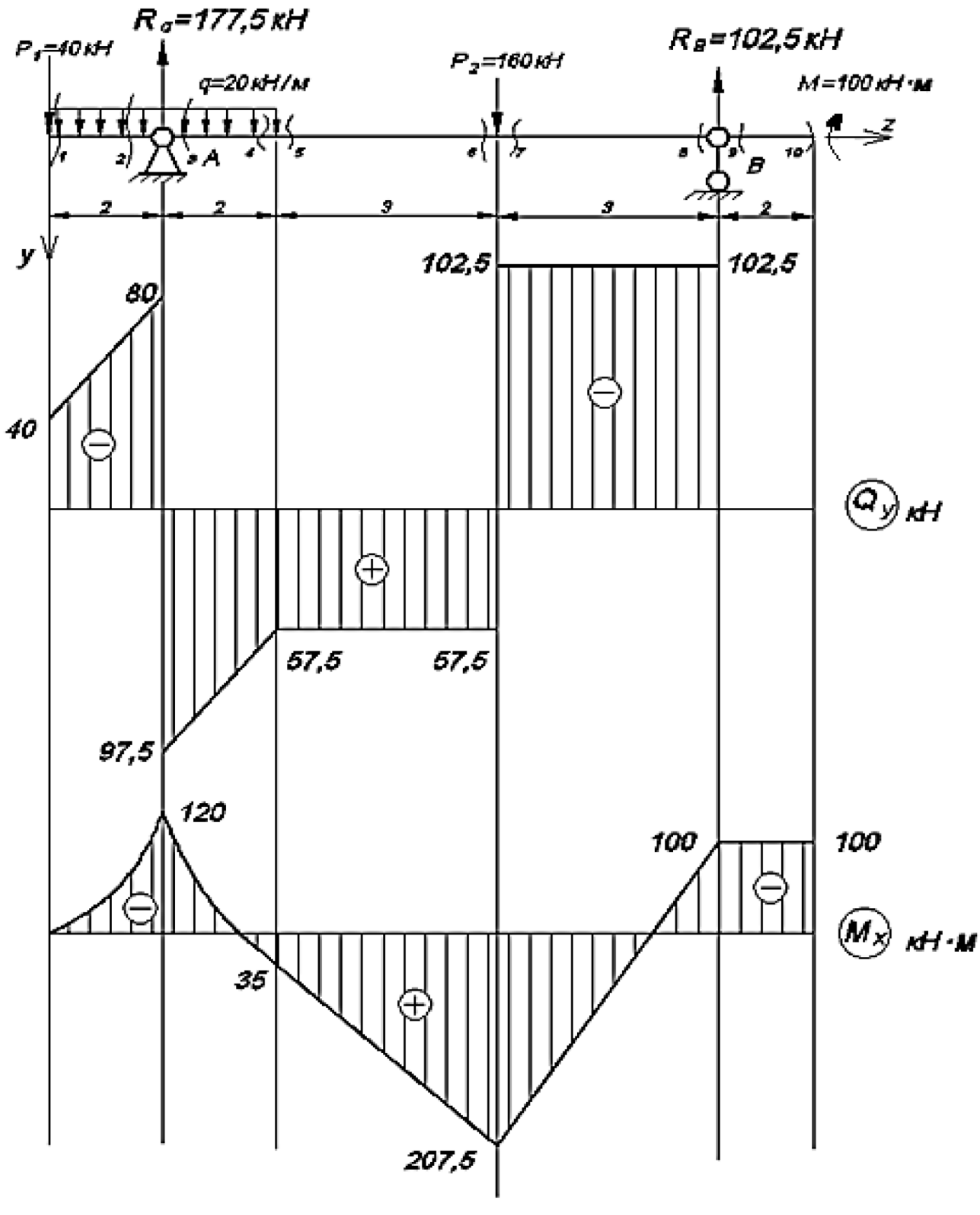


Рис. 1. Схема балки до задачі з поетапним розв’язанням її.

4) Визначаємо величини згинальних моментів M_x в характерних перерізах і будуємо епюру (рис. 6.11).

$$M_{x(1)} = 0 \text{ кН·м}; \quad M_{x(2)} = M_{x(3)} = -2 \cdot P_1 - 2 \cdot q = -120 \text{ кН·м};$$

$$M_{x(4)} = M_{x(5)} = -4 \cdot P_1 - 4 \cdot 2 \cdot q + 2 \cdot R_A = 35 \text{ кН·м};$$

$$M_{x(6)} = M_{x(7)} = -M + 3 \cdot R_B = 207{,}5 \text{ кН·м};$$

$$M_{x(8)} = M_{x(9)} = M_{x(10)} = -M = -100 \text{ кН·м}.$$

Для найбільш напруженого поперечного перерізу (рис. 1) балки необхідно побудувати епюру σ, прийнявши $в$ =15 см, h = 24 см. Максимальний момент

$M_{x\,(7–7)}$ = 207,5 кН·м. (рис.1).

Для точки 1.

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y = \frac{207{,}5 \cdot (-0{,}12)}{0{,}15 \cdot (0{,}24)^3 / 12} = -144 \text{ МПа}$$

Для точки 2.

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y = \frac{207{,}5 \cdot (-0{,}06)}{0{,}15 \cdot (0{,}24)^3 / 12} = -72 \text{ МПа}$$

Для точки 3: $\sigma_{(3)} = 0$.

За аналогією для точок 4 і 5 маємо:

$\sigma_{(4)} = 72$ МПа. $\sigma_{(5)} = 144$ МПа.

Переріз 7–7

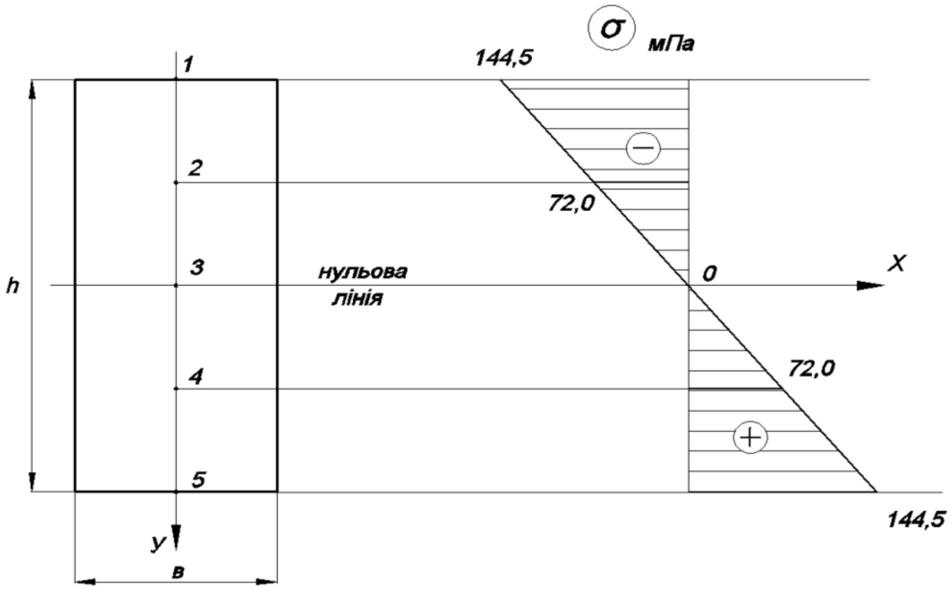


Рис. 2. Побудова епюри нормальних напружень при чистому згині.

Практична робота №9 Розрахунок статично визначеної балки на згинання (4 години)

Мета роботи: Засвоїти методику визначення умови міцності по нормальних напруженнях підібрати: а) діаметр d круглого поперечного перерізу; б) висоту h і ширину b прямокутного поперечного перерізу, прийнявши b = 0,5h;

Приклад виконання роботи:

Для консольної балки необхідно: - визначити опорні реакції; - побудувати епюри поперечних сил і моментів згинання; - із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати: а) діаметр d круглого поперечного перерізу; б) висоту h і ширину b прямокутного поперечного перерізу, прийнявши b = 0,5h; в) побудувати епюри нормальних і дотичних напружень в небезпечних перерізах.

Дано: балку розмірами a1=1,5м; a2=2м ; l=5,5м; P=5кН ; q=15 кН/м; [σ]=10 МПа

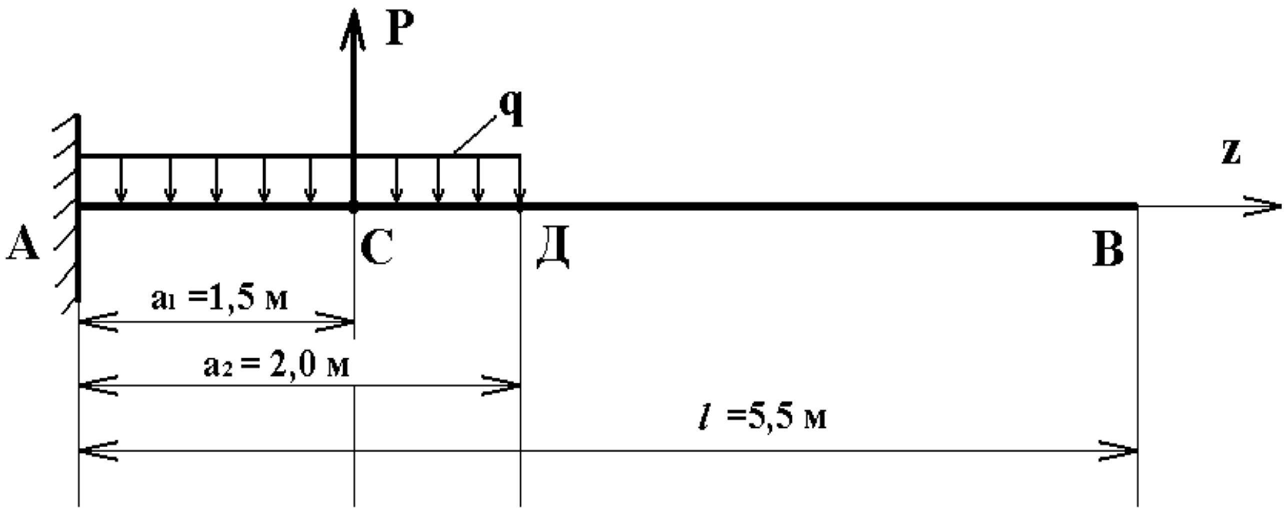


Рис.1. Схема до задачі

1. Визначаємо реакції опор за рівнянням рівноваги. В точці А маємо жорстке защемлення. В точці жорсткого защемлення маємо три складові реакції Ra, Za і пару сил з моментом защемлення Ma (реактивний момент).

$$\begin{cases} \Sigma Z_1 = 0; \quad Z_A = 0 \\ \Sigma Y_1 = 0; \quad -R_A - P + q \cdot a_2 = 0 \\ \Sigma\Sigma M_{iA} = 0; \quad -q \cdot a_2 \cdot \dfrac{a_2}{2} + P \cdot a_1 + M_A = 0 \end{cases}$$

Звідси визначаємо реакції: $R_A = 25$кН; $M_A = 22{,}5$кН·м.

Поперечні сили у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$Q_{(Y)1}=Q_{(Y)2}=Q_{(Y)3}=0;$

$Q_{(Y)4}=q\cdot 0{,}5=15\cdot 0{,}5=7{,}5$ кН;

$Q_{(Y)5}=Q_{(Y)4}-P=7{,}5-5=2{,}5$кН;

$Q_{(Y)6}=q\cdot 2-P=15\cdot 2-5=25$ кН.

2. Згинальні моменти у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$\mathrm{M}_{(\mathrm{X})I}=M_{(X)2}=M_{(X)3}=0;$$

$$\mathrm{M}_{(\mathrm{X})4}=M_{(X)5}=-\left(q\cdot\frac{a_2}{4}\cdot\frac{a_2}{8}\right)=-(15\cdot 0{,}5\cdot 0{,}25)=-1{,}87\ \text{к}H\cdot\text{м};$$

$$\mathrm{M}_{(\mathrm{X})6}=-\left(q\cdot a_2\cdot\frac{a_2}{2}\right)+P\cdot a_1=-(15\cdot 2\cdot 1)+0{,}5\cdot 1{,}5$$
$$=-22{,}5\ \text{к}H\cdot\text{м}$$

3. Із умови міцності по нормальним напруженням підбираємо:

А) балку круглого перерізу з діаметром d.

$$W_{kp}=\frac{M_{x\,max}}{[\sigma]}=\frac{22{,}5\cdot 10^3}{10\cdot 10^6}=2{,}25\ \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3=2250\ \text{см}^3;$$

$$W_x=\frac{\pi\cdot d^3}{32}\approx 0{,}1\cdot d^3;$$

$$W_{kp}=2250=W=0{,}1\cdot d^3;$$

$$d=\sqrt[3]{\frac{2250}{0{,}1}}=\sqrt[3]{22500}=28{,}2\ \text{см}$$

Б) балку прямокутного поперечного перерізу, прийнявши b = 0,4·h.

$$W=\frac{b\cdot h^2}{6}=\frac{0{,}4\cdot h^3}{6};\qquad\qquad W_{kp}=2250\text{см}^3;$$

$$h=\sqrt[3]{\frac{W_{\text{кр}}\cdot 6}{\text{в}}}=\sqrt[3]{\frac{2250\cdot 6}{0{,}4}}=32{,}3\text{см}$$

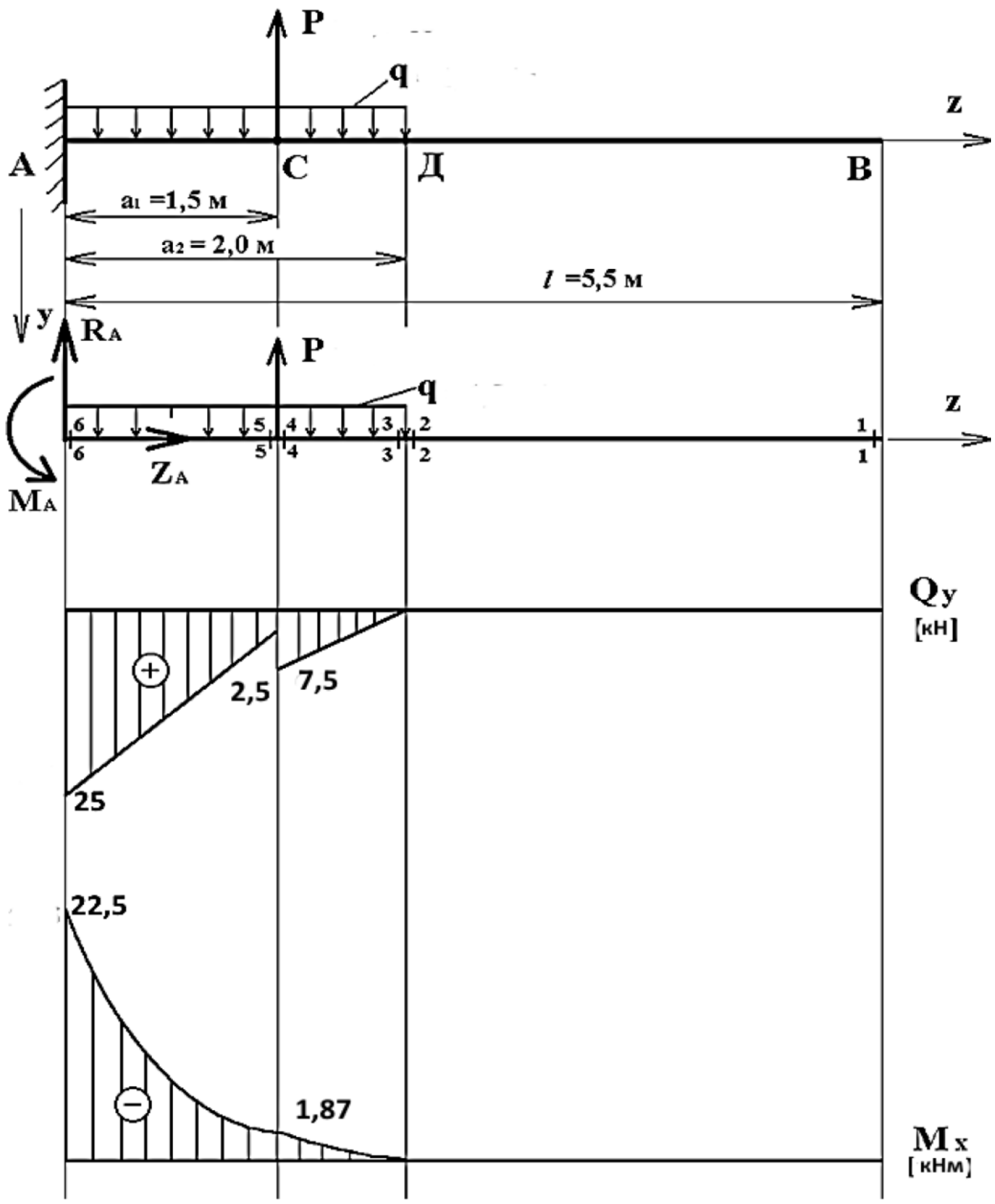


Рис. 2. Побудова епюр

4. Будуємо епюру нормальних і дотичних напружень в перерізах з максимальним значенням моменту Mмах і максимальним значенням поперечної сили Qмах. Таким перерізом виявився переріз в точці 6.

А) для круглого поперечного перерізу:

Нормальні напруження :

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22{,}5 \cdot 10^3}{0{,}1 \cdot d^3} = \frac{22{,}5 \cdot 10^3}{0{,}1 \cdot (0{,}282)^3} = 10\text{МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10\text{МПа}.$$

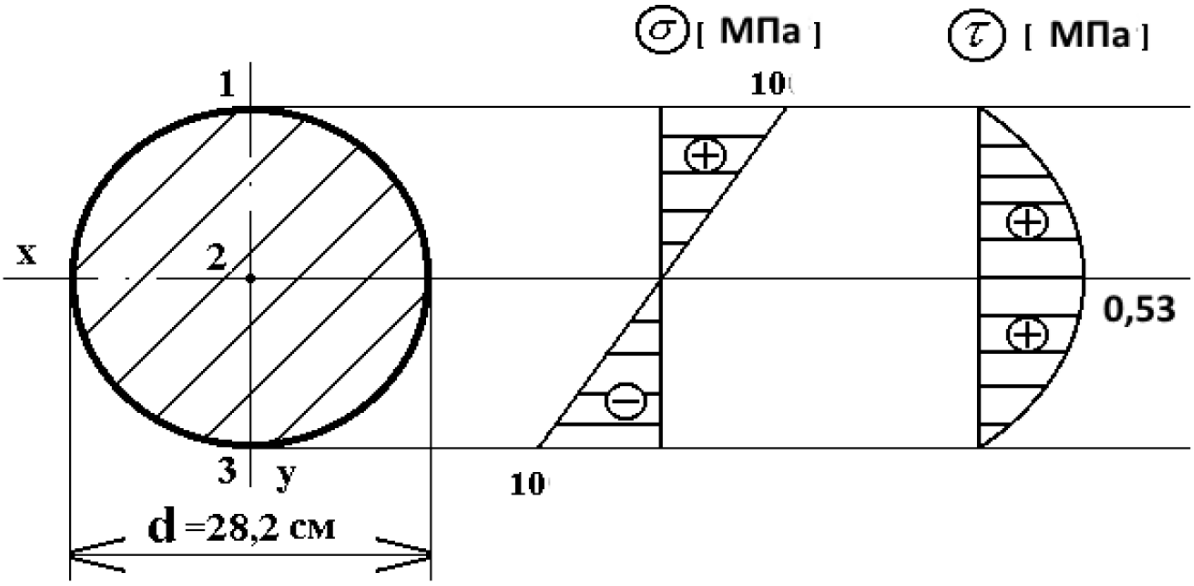


Рис.3. Побудова епюр для круглого поперечного перерізу

Дотичні напруження :

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b}$$

$$\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0; \qquad \tau_{(2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{Y\,max}}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot (0{,}282)^2} = 0{,}53 \text{ МПа}$$

Б) для квадратного поперечного перерізу:

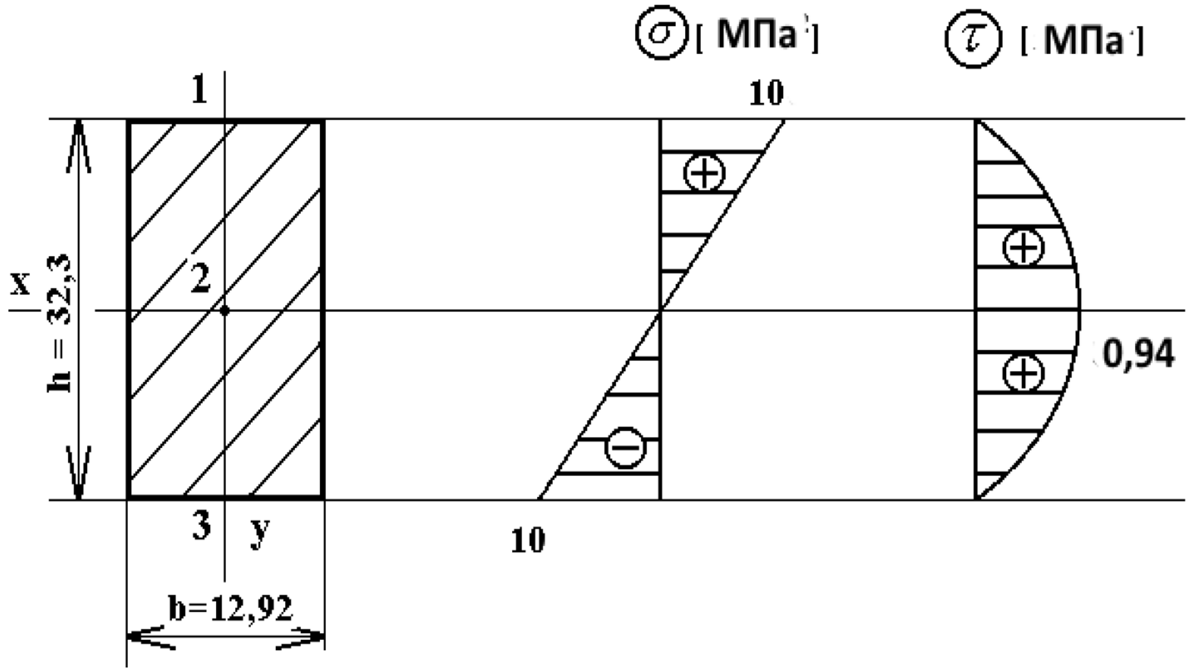


Рис.4. Побудова епюр для квадратного поперечного перерізу

Нормальні напруження:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22{,}5\cdot 10^3}{0{,}1\cdot d^3} = \frac{22{,}5\cdot 10^3}{0{,}1\cdot (0{,}282)^3} = 10\text{МПа}; \qquad \sigma_{(2)} = 0;$$

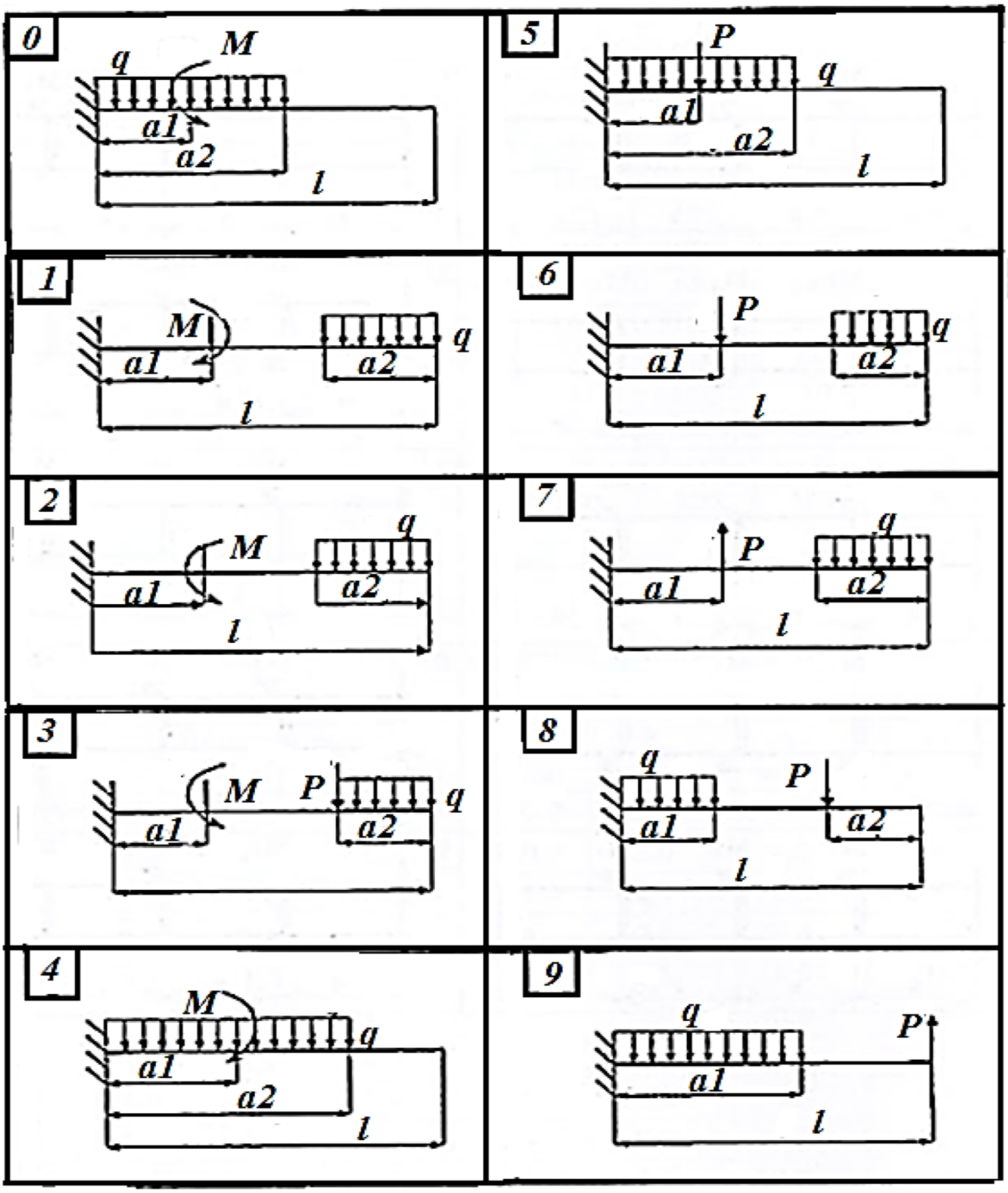
$$\sigma_{(3)} = -10\text{МПа}$$

Дотичні напруження:

$$\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0;$$

$$\tau_{(2)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q_{Y\,max}}{F} = \frac{3}{2}\cdot\frac{25\cdot 10^3}{b\cdot h} = \frac{3\cdot 25\cdot 10^3}{2\cdot 0{,}1292\cdot 0{,}323} = 0{,}94\text{ МПа}$$

Завдання для самостійного виконання



Таблиця 1.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	L,m	a_1,m	a_2,m	M, кН·м	P, кН	Q, кН/м	[σ], МПа
1	5,0	1,0	2,0	10	5	5	12
2	4,0	1,5	1,5	20	10	10	10
3	3,5	1,0	1,5	3	3	3	8
4	4,5	2,0	1,0	4	4	4	12
5	5,5	1,5	2,0	5	5	5	10
6	5,0	2,0	1,5	6	6	6	8
7	4,5	2,0	0,5	7	7	7	12
8	4,0	1,0	1,0	8	8	8	10
9	3,0	1,8	0,9	9	9	9	8
10	4,5	1,5	1,5	10	10	10	12

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних та практичних робіт з дисципліни
«Теоретична механіка та механіка матеріалів і конструкцій»
«Бакалавр» спеціальності
208 «Агроінженерія»
денної та заочної форм навчання

Кафедра технічного сервісу

Укладач: Бондарев Сергій Григорович.

Редактор

Відповідальний за випуск: Бондарев С.Г.

Суми, РВВ, Сумський національний аграрний університет, вул. Кірова, 160

Підписано до друку;   2023 р. Формат А5: Гарнітура Arial
Тираж 100 примірників.
Умовних друкованих аркушів. Замовлення   Ум. друк. арк. 2,6